

N° d'Ordre : 2(1972)

N° CNRS : AO 6574

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Dominique MARICHAL

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : Contribution au calcul des masses ajoutées et à leur
étude expérimentale

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 16 FEV. 1972 devant la Commission d'Examen

M. BRARD Président

M. GUEVEL }
M. ABKOWITZ } Examineurs

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

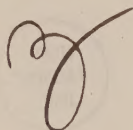
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Dominique MARICHAL

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : Contribution au calcul des masses ajoutées et à leur
étude expérimentale

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 16 FEV. 1972 devant la Commission d'Examen

M. BRARD Président

M. GUEVEL
M. ABKOWITZ } Examineurs

THESES

DOCTOR-INGENIEUR

DOCTEUR-INGENIEUR

DOCTEUR-INGENIEUR

DOCTEUR-INGENIEUR

DOCTEUR-INGENIEUR

DOCTEUR-INGENIEUR



DOCTEUR-INGENIEUR

DOCTEUR-INGENIEUR

DOCTEUR-INGENIEUR

DOCTEUR-INGENIEUR

DOCTEUR-INGENIEUR

DOCTEUR-INGENIEUR

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. PETRESCO Mathématiques

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs

M. BRILLOUET

Mathématiques

M. PAUC

"

M. PETRESCO

"

M. RAFFIN

"

M. VIVIER (ENSM)

"

M. TARDY (ENSM)

Mécanique

M. RAVILLY (ENSM)

"

M. AVIGNON

Physique

M. BOULLLOUD

"

M. COLLET

"

M. MINN

"

M. MEZENECY (ENSM)

"

M. MOUTON

"

M. DUNOYER

Chimie

M. GRAFF

"

M. MARTIN

"

M. PIERI

"

M. QUINIOU

"

M. ROUXEL

"

M. WOJTKOWIAK

"

Melle DEBRAUX

Biologie

M. GARRIGUES

"

Mme LE DOUARIN

"

M. LE DOUARIN

"

M. SELLIER

"

M. CAVET

Sciences de la Terre

Professeurs associés

M. BRARD (ENSM)

Mécanique

M. ABKOWITZ (ENSM)

Mécanique

Professeurs sans chaire	M. BARDON	Physique
	M. GOUREAUX	"
	M. LASKAR	"
	Melle OFFRET (EN SM)	"
	M. GOBIN (EN SM)	Chimie
	M. TOURNOUX	"
	M. DUPONT	Biologie
	M. SAUDRAY	"
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
Maîtres de Conférences	M. BETTEN	Mathématiques
	M. FOUQUES	"
	M. GATESOUE	"
	M. GAPAILLARD (Chargé d'enseignement)	"
	M. IBISCH	"
	M. LAMEAU (EN SM)	"
	M. LEBORGNE	"
	M. PHAN-THE-LAI (Chargé d'Enseignement)	"
	M. DUBIGEON (Chargé d'Enseignement EN SM)	Mécanique
	M. GUEVEL (EN SM)	"
	M. SULMONT (EN SM)	"
	M. VILAINE (EN SM)	"
	M. CAILLER (IUT)	Physique
	M. LE BIHAN	"
	M. LE CORRE (IUT)	"
	M. LE MAITRE	"
	M. LONCKE	"
	M. ROSIER	"
	M. THOMAS (Chargé d'Enseignement IUT)	"
	M. BOUCHY (IUT)	Chimie
	M. CHABANEL	"
	M. LE MAÎTRE (Chargé d'Enseignement IUT)	"
	Mme MARTIN	"
	M. POINTEAU (EN SM)	"
	M. AMOURIQ	Biologie
	M. LEBRUN	"
	Mme NICOLAS-PRATT	"
Maitres de Conférences	M. FORESTIER	Sciences de la Terre
	M. NICOLAS	"

A ma femme,

à mes enfants,

à mes parents.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur l'Ingénieur Général BRARD, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury.

Je tiens à dire toute ma reconnaissance et tous mes remerciements à Monsieur P. GUEVEL pour les conseils éclairés qu'il a bien voulu me prodiguer, et pour le dévouement avec lequel il a dirigé mes travaux.

Je remercie Monsieur le Professeur ABKOWITZ d'avoir bien voulu participer à ce Jury.

Je tiens également à remercier, en particulier, Messieurs P. SULMONT et P. VAUSSY, ainsi que tous mes camarades du Laboratoire de Mécanique des Fluides et du Centre de Calcul pour l'aide qu'ils m'ont apportée.

SOMMAIRE

	<i>Pages</i>
INTRODUCTION -	1
Chapitre 1 - ETUDE THEORIQUE DE LA MASSE AJOUTEE -	3
- Calcul de la masse ajoutée par intégration du potentiel de l'écoulement relatif	3
- Calcul de la masse ajoutée par la méthode du doublet équivalent	7
- Cas des corps axisymétriques	12
Chapitre 2 - CAS D'UN PARALLELEPIPEDE RECTANGLE EN MILIEU FINI -	17
- Transformation de SCHWARZ	21
- Etude des cas limites	32
- Résultats	38
Chapitre 3 - CORPS AXISYMETRIQUES EN MILIEU INFINI -	43
Chapitre 4 - ETUDE D'UN CORPS QUELCONQUE EN MILIEU INFINI -	59
Chapitre 5 - ETUDE EXPERIMENTALE DE LA MASSE AJOUTEE -	67
- Dispositif experimental	67
- Etude de l'influence des parois et de l'amortissement	69
Chapitre 6 - ETUDE DU COEFFICIENT DE MASSE AJOUTEE DES CORPS AXISYMETRIQUES PAR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME INTERIEUR -	75
Annexe 1 - FORMULAIRE -	83
Annexe 2 - VALEURS DE q -	89
Annexe 3 - PROGRAMMES -	95
Annexe 4 - TRAVAIL DES FORCES DYNAMIQUES -	101

Annexe 5 - CALCUL DU DOUBLET EQUIVALENT -

103

Annexe 6 - DENSITE SUPERFICIELLE DE SINGULARITES CINEMATIQUEMENT
EQUIVALENTES A UNE SPHERE EN MOUVEMENT DE TRANSLATION -

105

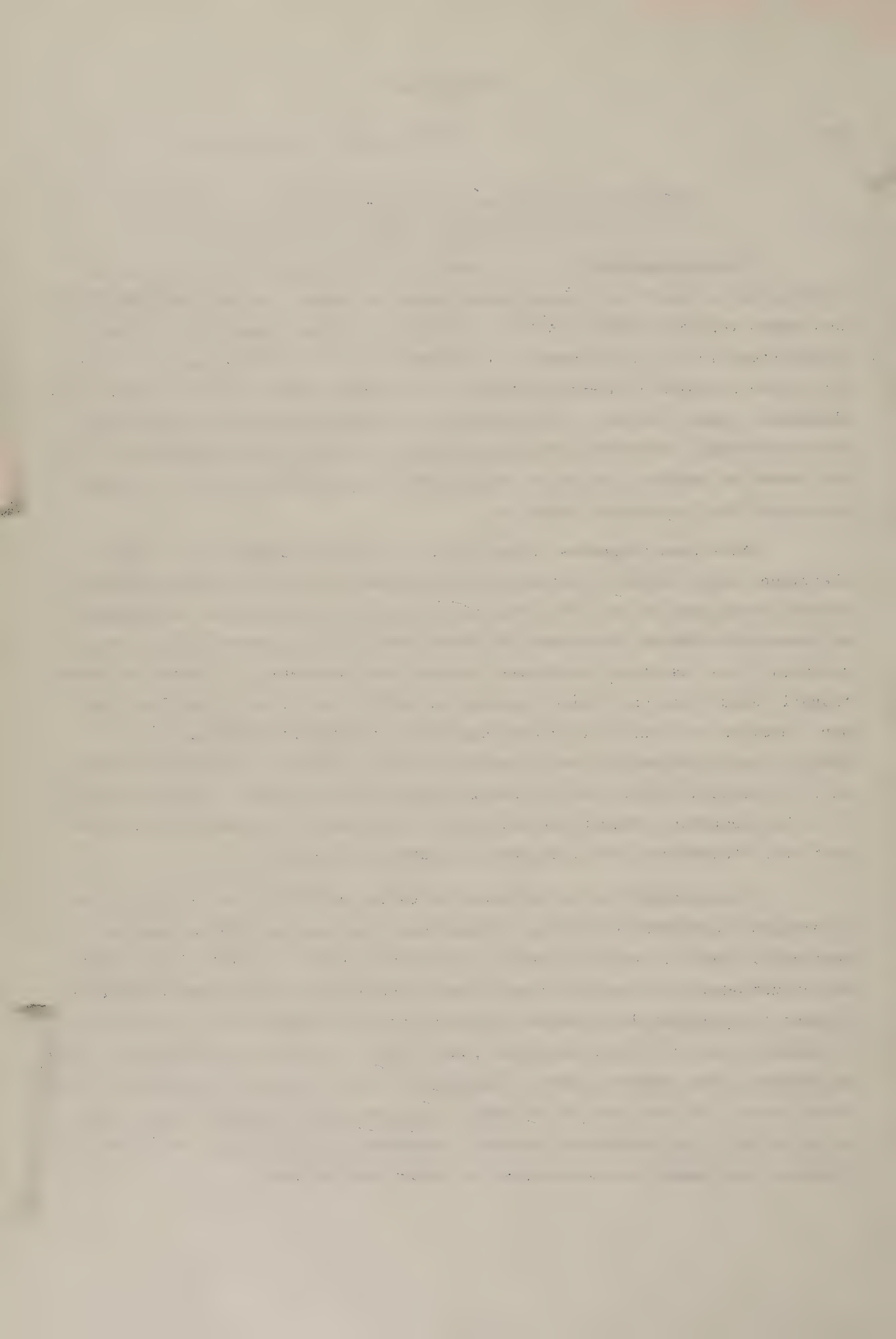
BIBLIOGRAPHIE -

INTRODUCTION

Bien qu'amorcée il y a plusieurs siècles déjà, l'étude des masses ajoutées est un sujet qui connaît actuellement un grand développement. En effet, des hommes tels que DUBUAT, en 1786, montrèrent, par une approche théorique, l'existence, lors du déplacement non uniforme d'un corps solide dans un fluide, d'un terme analogue à un terme d'inertie. Son étude semble avoir été quelque peu abandonnée jusqu'à ce que le développement des structures marines, telles que les plateformes, les bouées océanographiques, les réservoirs sousmarins etc..., ait reposé de manière plus aigue ce problème. Nous assistons depuis à la parution régulière de nombreux articles.

Nous nous proposons, d'une part, de faire une synthèse de calculs théoriques déjà publiés, d'autre part, d'apporter une contribution personnelle à cette étude dans le cas d'un corps quelconque se déplaçant avec un mouvement de translation non uniforme dans un fluide parfait. Les auteurs qui sont déjà parvenus à des résultats théoriques valables sont nombreux ; l'intérêt de notre travail réside donc en la mise au point de méthodes de calcul nouvelles, tant par l'analyse qui leur sert de base que par le traitement numérique, en la vérification expérimentale de la validité de nos calculs, et, enfin, en l'étude de l'influence de parois sur des coefficients de masse ajoutée. Signalons que, si la bibliographie portant sur des études théoriques est abondante, celle faisant état d'expérience est plus rare et souvent criticable.

Nous pensons que nos méthodes de calcul utilisées pour la résolution du problème de NEUMANN en milieu illimité sont susceptibles d'être mises en application dans le cas où il existe une surface libre. En effet, le principe de ces méthodes n'est pas lié à une forme particulière du noyau des intégrales donnant l'expression des vitesses induites par des singularités de type source. Il apparaît donc qu'il est possible, pour traiter le cas de structures oscillant en présence d'une surface libre, d'introduire dans le noyau la fonction de GREEN d'une source. On voit donc là la justification de notre recherche : mettre au point un outil, qui moyennant quelques développements ultérieurs, nous permettra d'étudier facilement les mouvements des structures marines.



Chapitre 1

ETUDE THEORIQUE DE LA MASSE AJOUTEE

Nous allons présenter dans ce chapitre deux approches théoriques de la notion de volume ajouté. Ces deux expressions d'un même résultat serviront de base aux différentes méthodes de calculs numériques que nous développerons par la suite.

Nos hypothèses, communes à toutes nos études, sont les suivantes :

- le corps étudié effectue un mouvement de translation non uniforme ;
- le fluide est parfait et incompressible ;
- l'écoulement est un écoulement à potentiel des vitesses.

Ces deux dernières hypothèses ne sont restrictives qu'en première analyse, en effet :

- d'une part, les effets de viscosité ne se font sentir que dans une couche mince voisine des parois des obstacles (nous développerons ce point plus en détail lors de l'étude expérimentale). Les écoulements réels sont donc pratiquement irrotationnels dans la majeure partie du domaine fluide.

- d'autre part, les vitesses de déplacement des structures que nous nous proposons d'étudier sont généralement faibles ; aussi, les forces de frottement qui varient sensiblement comme les carrés des vitesses sont-elles le plus souvent négligeables devant les termes d'inertie.

CALCUL DE LA MASSE AJOUTEE PAR INTEGRATION DU POTENTIEL DE L'ECOULEMENT RELATIF -

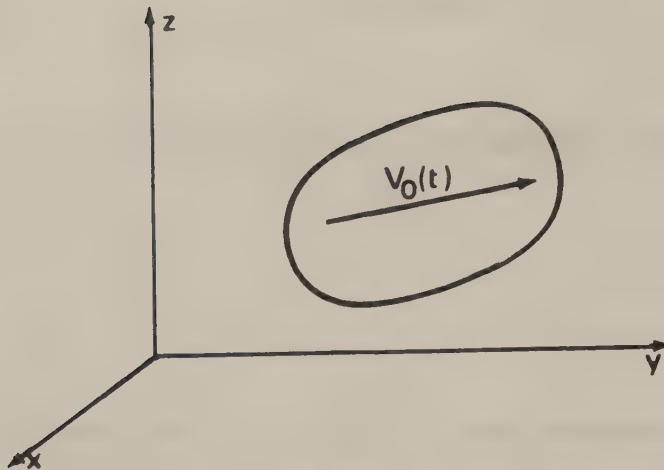


Fig. 1,1

Considérons un corps quelconque indéformable et limité par une surface (S). Il se déplace, dans un fluide illimité au repos à l'infini, avec un mouvement de translation non uniforme.

En tout point du domaine fluide nous pouvons écrire la relation de Lagrange :

$$(1,1) \quad p + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = C$$

C est une constante, ϕ est le potentiel de l'écoulement absolu. Cette relation est, en particulier, vérifiée à la surface du corps ; on en tire l'expression de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le solide.

$$(1,2) \quad \vec{T} = \iint_S -p \vec{n} dS$$

$\vec{n}$ étant le vecteur unitaire de la normale à (S) dirigée vers l'extérieur.

$$(1,3) \quad \vec{T} = \iint_S (-C + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}) \vec{n} dS$$

Explicitons chacune des intégrales qui intervient dans le calcul de $\vec{T}$

$$1) \quad \iint_S (-C) \vec{n} dS = 0$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \iint_S \rho g z \vec{n} dS &= \rho g \iiint_{\tau_0} \text{grad } z d\tau = \rho g \iiint_{\tau_0} \vec{k} d\tau \\ &= \rho g \tau_0 \vec{k} \end{aligned}$$

τ_0 étant le volume du solide. Cette intégrale représente la poussée hydrostatique que le fluide exerce sur le corps.

$$3) \iint_S \rho \frac{V^2}{2} \vec{n} dS$$

Cette intégrale n'est autre que la trainée que l'on calcule dans le cas d'un déplacement à vitesse constante. Celle-ci est nulle dans le cas où le corps ne se comporte pas comme un profil portant. Par contre, dans le cas d'un profil portant, cette intégrale n'est pas nulle et ne prend pas la même valeur en mouvement permanent et en mouvement non permanent.

Il apparaît donc du fait de la non uniformité du mouvement un terme supplémentaire :

$$\vec{F}_i = \iint_S \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \vec{n} dS$$

Cette dernière expression est valable quelque soit la nature du mouvement, puisque nous n'avons pas encore traduit notre hypothèse de mouvement de translation. C'est elle qui conduit à la notion de masse ajoutée.

Matrice des masses ajoutées pour les mouvements de translation

En un point M du fluide, le potentiel de l'écoulement relatif s'écrit :

$$\phi_r = \phi - \vec{V}_0 \cdot \vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = \vec{OM}$$

soit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\gamma}_0 \cdot \vec{r}$$

d'où :

$$\vec{F}_i = \rho \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \vec{n} dS + \rho \iint_S (\vec{\gamma}_0 \cdot \vec{r}) \vec{n} dS$$

La seconde intégrale peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\gamma}_0 \cdot \vec{r}) \vec{n} dS &= \iiint_{\tau_0} g \text{grad} (\vec{\gamma}_0 \cdot \vec{r}) d\tau = \iiint_{\tau_0} \vec{\gamma}_0 d\tau \\ &= \vec{\gamma}_0 \tau_0 \end{aligned}$$

soit :

$$\vec{F}_i = \rho \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \vec{n} dS + \rho \vec{\gamma}_0 \tau_0$$

Appelons ϕ_1 le potentiel de l'écoulement relatif obtenu lorsque l'on considère le corps au repos dans un fluide se déplaçant à l'infini avec la vitesse unité dans la direction de OX. De même, pour ϕ_2 et ϕ_3 dans les directions OY et OZ. Nous avons :

$$\phi_r = - \vec{V}_0(t) \cdot (\phi_1 \vec{i} + \phi_2 \vec{j} + \phi_3 \vec{k})$$

et nous pouvons écrire :

$$\vec{F}_i = - \rho \iint_S \vec{\gamma}_0 \cdot (\phi_1 \vec{i} + \phi_2 \vec{j} + \phi_3 \vec{k}) \vec{n} dS + \rho \vec{\gamma}_0 \tau_0$$

soit, sous forme matricielle :

$$(1,4) \quad [\vec{F}_i] = - \rho \{ [T] - [I] \tau_0 \} [\vec{\gamma}_0]$$

avec :

$$(1,5) \quad [T] = \begin{bmatrix} \iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} \phi_1 dS & \iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} \phi_2 dS & \iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} \phi_3 dS \\ \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \phi_1 dS & \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \phi_2 dS & \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \phi_3 dS \\ \iint_S \vec{k} \cdot \vec{n} \phi_1 dS & \iint_S \vec{k} \cdot \vec{n} \phi_2 dS & \iint_S \vec{k} \cdot \vec{n} \phi_3 dS \end{bmatrix}$$

La force $\vec{F}_i$ apparait donc comme une force d'inertie ; la matrice $\rho \{ [T] - [I] \tau_0 \}$ est homogène à une matrice des masses, elle est indépendante de la vitesse de translation et de l'accélération du corps. On l'appelle matrice des masses ajoutées.

La condition de glissement sur la surface du corps peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{i} \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ; \quad \vec{j} \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} ; \quad \vec{k} \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi_3}{\partial n}$$

D'une part, la seconde formule de Green exprime que :

$$\iint_S \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n} \phi_2 - \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \phi_1 \right) dS = 0$$

de même pour les autres termes non diagonaux de notre matrice. Nous démontrons ainsi la symétrie de la matrice des masses ajoutées. D'autre part, les termes diagonaux sont de la forme :

$$\iint_S \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \phi_1 dS$$

ils sont donc essentiellement positifs. Nous pouvons donc écrire :

$$[T] = \begin{bmatrix} \iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} \phi_1 dS & \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \phi_1 dS & \iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} \phi_3 dS \\ \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \phi_1 dS & \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \phi_2 dS & \iint_S \vec{k} \cdot \vec{n} \phi_2 dS \\ \iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} \phi_3 dS & \iint_S \vec{k} \cdot \vec{n} \phi_2 dS & \iint_S \vec{k} \cdot \vec{n} \phi_3 dS \end{bmatrix}$$

CALCUL DE LA MASSE AJOUTEE PAR LA METHODE DU DOUBLET EQUIVALENT -

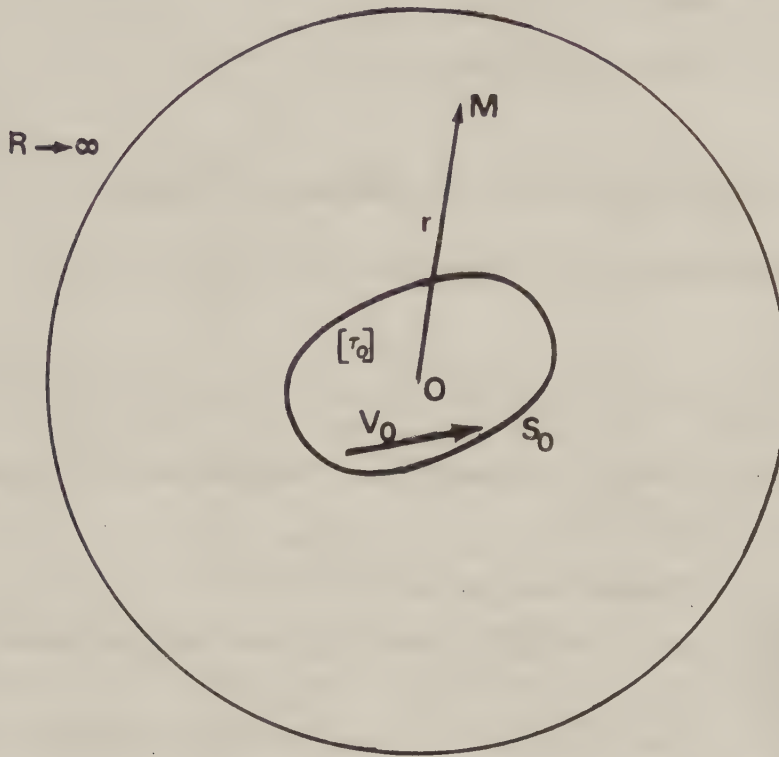


Fig. 1,2

Nous nous proposons d'étudier l'énergie cinétique de l'ensemble du fluide qui entoure le corps considéré.

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho v^2 d\tau$$

Ω est le volume fluide.

$\vec{V}$ est la vitesse absolue des particules fluides et puisque nous avons supposé l'existence d'un potentiel des vitesses :

$$\vec{V} = \text{grad } \phi$$

Donc :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho (V^2 - v_o^2) d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho v_o^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho (\vec{V} - \vec{v}_o) \cdot (\vec{V} + \vec{v}_o) d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho v_o^2 d\tau \end{aligned}$$

Nous calculons ces intégrales pour le volume fluide compris entre le corps et une sphère l'entourant. Nous examinerons le cas où le rayon de la sphère tend vers l'infini.

$$\frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho v_o^2 d\tau = \frac{1}{2} v_o^2 \rho \left[\frac{4}{3} \pi R^3 - \tau_o \right]$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}\vec{V} + \vec{V}_0 &= \text{grad } \phi + \vec{V}_0(t) \\ &= \text{grad } (\phi + \vec{r} \cdot \vec{V}_0(t))\end{aligned}$$

Soit :

$$(\vec{V} + \vec{V}_0) (\vec{V} - \vec{V}_0) = (\vec{V} - \vec{V}_0) \text{grad } (\phi + \vec{r} \cdot \vec{V}_0(t))$$

$$\text{Or : } \text{div } m \vec{A} = m \text{div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } m$$

Donc :

$$(\vec{V} + \vec{V}_0) (\vec{V} - \vec{V}_0) = \text{div } [(\phi + \vec{r} \cdot \vec{V}_0(t)) (\vec{V} - \vec{V}_0(t))] - (\phi + \vec{r} \cdot \vec{V}_0) \text{div } (\vec{V} - \vec{V}_0)$$

Or $\vec{V} - \vec{V}_0$ est la vitesse relative $\vec{V}_r$ de l'écoulement et l'équation de continuité s'écrit : $\text{div } \vec{V}_r = 0$

L'expression de l'énergie cinétique devient donc :

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho \text{div } [(\phi + \vec{r} \cdot \vec{V}_0) (\vec{V} - \vec{V}_0)] d\tau + \frac{1}{2} V_0^2 \rho \left[\frac{4}{3} \pi R^3 - \tau_0 \right] \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma + S_0} \rho (\phi + \vec{r} \cdot \vec{V}_0) (\vec{V} - \vec{V}_0) \cdot \vec{n} dS + \frac{1}{2} V_0^2 \rho \left[\frac{4}{3} \pi R^3 - \tau_0 \right]\end{aligned}$$

Sur le corps, la condition de glissement s'écrit :

$$(\vec{V} - \vec{V}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{donc : } E_c = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \rho (\phi + \vec{r} \cdot \vec{V}_0) (\vec{V} - \vec{V}_0) \cdot \vec{n} dS + \frac{1}{2} V_0^2 \rho \left[\frac{4}{3} \pi R^3 - \tau_0 \right]$$

Considérons, maintenant, le cas où R tend vers l'infini. On sait que les perturbations causées par la présence d'un corps dans l'écoulement à l'infini sont de la même forme que celles produites par un doublet. Ce que l'on peut encore exprimer par : un corps se comporte à l'infini comme un doublet que l'on nomme doublet équivalent. On connaît donc les expressions du potentiel et de la vitesse à l'infini.

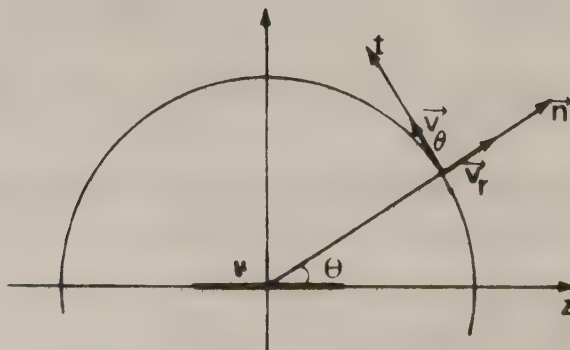


Fig. 1,3

$$(1,6) \quad \phi = - \frac{1}{4 \pi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{\mu} \cdot \vec{n}$$

$$(1,7) \quad \vec{V} = \frac{1}{4 \pi r^3} (3 (\vec{\mu} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} - \vec{\mu})$$

L'intégrale qui intervient dans l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$E_{c1} = \frac{\rho}{2} \iint_{\Sigma} \left(\frac{(\vec{\mu} \cdot \vec{n})^2}{4 \pi r^2} + \vec{V}_o \cdot \vec{r} \right) \left\{ \frac{1}{4 \pi r^3} [3 (\vec{\mu} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} - \vec{\mu}] - \vec{V}_o \right\} \cdot \vec{n} \, dS$$

Soit :

$$E_{c1} = \frac{\rho}{2} \iint_{\Sigma} \frac{1}{4 \pi r^2} [3 (\vec{\mu} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} - \vec{\mu}] (\vec{V}_o \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \, dS \\ + \frac{\rho}{2} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{n}}{4 \pi r^2} \vec{V}_o \cdot \vec{n} \, dS - \frac{\rho}{2} \iint_{\Sigma} \vec{V}_o (\vec{V}_o \cdot \vec{r}) \cdot \vec{n} \, dS$$

ce qui est obtenu en négligeant les termes en $\frac{1}{r^3}$ et d'ordre inférieur qui, intégrés deux fois, donnent des expressions en $\frac{1}{r}$, au plus, donc qui tendent vers zéro si r tend vers l'infini.

$$E_{c1} = \frac{\rho}{2} \iint_{\Sigma} \frac{1}{4 \pi r^2} [3 (\vec{\mu} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{V}_o] \cdot \vec{n} \, d\epsilon + \frac{\rho}{2} \iint_{\Sigma} - \vec{V}_o (\vec{V}_o \cdot \vec{r}) \cdot \vec{n} \, d\epsilon$$

$$E_{c1} = \frac{\rho}{2} (I + J)$$

Soit, pour la sphère de rayon infini :

$$I = \frac{1}{4 \pi R^2} \iint_{\Sigma} 3 (\vec{\mu} \cdot \frac{\vec{r}}{R}) \vec{V}_o \cdot \vec{n} \, d\epsilon \\ = \frac{3}{4} \frac{\vec{V}_o}{\pi R^3} \cdot \iiint_{[\Omega]} \text{grad} (\vec{\mu} \cdot \vec{r}) \, d\tau$$

$[\Omega]$ volume intérieur de la sphère, y compris celui du corps en mouvement.

$$I = \frac{3}{4} \frac{\vec{V}_o}{\pi R^3} \cdot \iiint_{[\Omega]} \vec{\mu} \, d\tau$$

$$I = \vec{V}_o \cdot \vec{\mu}$$

de même pour l'intégrale J :

$$J = - V_o^2 \frac{4}{3} \pi R^3$$

soit :
$$E_c = \frac{\rho}{2} [\vec{V}_0 \cdot \vec{\mu} - V_0^2 \frac{4}{3} \pi R^3 + V_0^2 (\frac{4}{3} \pi R^3 - \tau_0)]$$

(1,8)
$$E_c = \frac{\rho}{2} [\vec{V}_0 \cdot \vec{\mu} - V_0^2 \tau_0]$$

L'analyse dimensionnelle de la formule (1,6) montre que le doublet équivalent est une forme linéaire de la vitesse du corps.

$$\vec{\mu} = [A] \vec{V}_0$$

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}$$

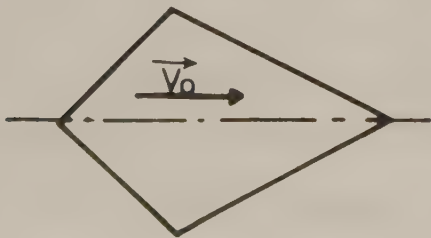
La connaissance, à tout instant, de l'énergie cinétique du fluide permet de calculer les efforts auxquels il est soumis ; on peut donc en déduire les expressions des coefficients de masse ajoutée.

(1,9)
$$\vec{F}_i = - \rho \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mu} - \tau_0 \vec{V}_0)$$

Ce résultat, rapproché du précédent, montre que la matrice de définition du doublet équivalent au corps est symétrique.

Exemple particulier :

Etudions le mouvement d'un corps axisymétrique qui se déplace parallèlement à son axe avec une vitesse $V_0(t)$.



La symétrie du problème et celle de la matrice (1,5) conduisent à :

$$\vec{\mu} = \lambda \vec{V}_0$$

et
$$E_c = \frac{\rho}{2} |\lambda - \tau| V_0^2$$

Lors du mouvement du corps, la variation de l'énergie cinétique du fluide est égale au travail des forces dynamiques que le solide exerce sur le fluide (voir annexe 4).

$$d E_c = \vec{F} \cdot \vec{V}_0 dt$$

La symétrie du problème nous montre encore que $\vec{F}$ et $\vec{V}_0$ sont parallèles et de même sens.

$$d E_c = F_o V_o . dt$$

$$\rho V_o [\lambda - \tau_o] \frac{d V_o}{dt} dt = F V_o$$

$$F = \rho [\lambda - \tau_o] \gamma_o$$

L'action du fluide sur le solide est donc :

$$F^* = - \rho [\lambda - \tau_o] \gamma_o$$

Si F est la force extérieure qui provoque le mouvement, l'équation fondamentale de la dynamique appliquée au corps de masse m_o s'écrit :

$$F + F^* = m_o \gamma_o$$

soit :

$$F = \gamma_o [m_o + \rho(\lambda - \tau_o)]$$

Il est alors évident que le volume fictif du corps est λ . La seule connaissance du doublet équivalent d'un corps axisymétrique se déplaçant le long de son axe nous donne donc son volume ajouté.

Le même raisonnement appliqué au cas d'un mouvement de translation rectiligne quelconque d'un corps, également quelconque, nous montrerait qu'il suffit de connaître la matrice symétrique de définition du doublet équivalent du corps pour en déduire son volume ajouté dans la direction du mouvement.

Nous avons ainsi obtenu deux méthodes générales de calcul des volumes ajoutés.

1) Calculer les intégrales de la forme : $W_f = \vec{i} \cdot \iint_S \phi \vec{n} dS$

2) Rechercher le doublet équivalent à l'infini au corps en mouvement.

La première permet d'aboutir à un résultat littéral exact, notamment dans le cas des problèmes plans où les contours du corps en mouvement et les frontières du domaine fluide se prêtent facilement à des transformations conformes.

La seconde est plus commode pour une étude numérique du problème des masses ajoutées de corps quelconques. En effet, si on représente le solide en mouvement par une distribution de singularités du type source, on obtient le doublet équivalent à l'infini en recherchant le barycentre des sources et celui des puits. La détermination des intensités des singularités employées est

maintenant réalisable grâce à l'emploi de calculateurs électroniques plus ou moins puissants. C'est la mise au point de méthodes de calcul de ces intensités qui constitue une partie importante de ce travail.

Cette seconde méthode présente cependant l'inconvénient de n'être applicable qu'en milieu fluide illimité. C'est pourquoi nous allons développer, ici, une autre théorie, qui ne constitue pas en soi une nouvelle approche de la notion de masse ajoutée, mais qui nous permettra de l'étudier même en milieu confiné lorsque le corps et le milieu fluide présentent une symétrie de révolution autour de l'axe du mouvement.

Remarque :

Dans le cas général, un corps se déplaçant de manière quelconque dans un fluide illimité, on peut appliquer le théorème des quantités de mouvements au fluide contenu dans le volume Ω défini à la figure (1,3), à condition de ne pas oublier dans le bilan des forces extérieures les actions du fluide situé en dehors de la sphère de rayon R . On obtient les expressions de la résultante des efforts hydrodynamiques et du moment résultant :

$$(1,9) \quad \vec{F}_i = - \rho \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{V}_O \tau_O)$$

CAS DES CORPS AXISYMETRIQUES -

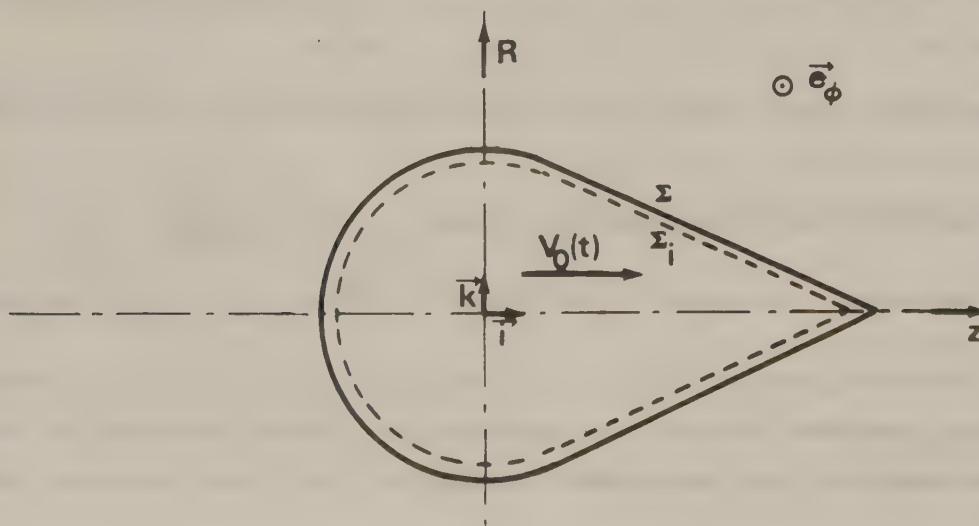


Fig. 1,4

Considérons un corps axisymétrique se déplaçant parallèlement à son axe.

Nous appliquons les formules (1,4) et (1,5). Les symétries du problème nous montrent qu'il nous suffit de calculer un seul coefficient

$$\iint \vec{i} \cdot \vec{n} \frac{\phi}{V_o} dS$$

tous les autres étant nuls.

Nous représentons le corps par une distribution superficielle de sources σ . Considérons l'écoulement intérieur. Dans ces conditions, le potentiel est continu à la traversée de la surface du corps.

$$\begin{aligned} W_f &= \frac{\vec{i}}{V_o} \cdot \iint_{\Sigma} \phi \vec{n} dS = \frac{\vec{i}}{V_o} \cdot \iint_{\Sigma_i} \phi \vec{n} dS \\ &= \frac{1}{V_o} \vec{i} \iiint_{\tau_o} \text{grad } \phi d\tau \\ &= \frac{1}{V_o} \vec{i} \cdot \iiint_{\tau_o} \vec{V}_i d\tau \end{aligned}$$

Le corps étant de révolution, on peut écrire :

$$W_f = \frac{1}{V_o} \vec{i} \cdot \iint_{\Sigma_i} \vec{V}_i 2\pi R dS$$

Or :

$$\vec{V} = \frac{1}{R} \text{grad } \psi \wedge \vec{e}_\phi$$

ψ étant la fonction courant de STOKES

$\vec{e}_\phi$ un vecteur unitaire perpendiculaire au plan (z,R)

$$\begin{aligned} W_f &= \frac{2\pi}{V_o} \vec{i} \cdot \iint_{\Sigma_i} (\text{grad } \psi \wedge \vec{e}_\phi) dS \\ &= \frac{2\pi}{V_o} \iint_{\Sigma_i} \text{grad } \psi \cdot (\vec{e}_\phi \wedge \vec{i}) dS \end{aligned}$$

$$W_f = \frac{2\pi}{V_o} \vec{k} \iint_{\Sigma_i} \text{grad } \psi dS$$

$$W_f = \frac{2\pi}{V_o} \vec{k} \cdot \int_{C_i} \psi \vec{n} d\ell = \frac{2\pi}{V_o} \int_{C_i} \psi (\vec{k} \cdot \vec{n}) d\ell$$

$$W_f = \frac{2\pi}{V_o} \int_{C_i} \psi dz$$

Or :

$$\int_{AB} \psi dz = [\psi z]_A^B - \int_{AB} z d\psi$$

Soit, pour un contour fermé :

$$\int_C \psi dz = - \int_C z d\psi$$

donc :

$$W_f = - \frac{2\pi}{V_o} \int_{C_i} d\psi$$

A la surface du corps, la discontinuité des vitesses est liée à la densité de source par :

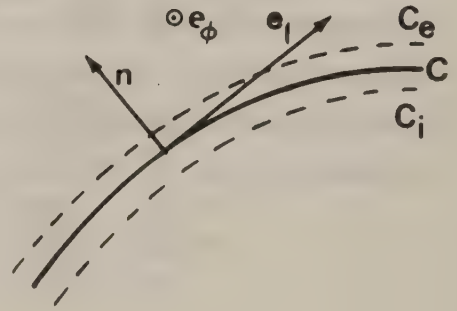
$$(\vec{V}_e - \vec{V}_i) \cdot \vec{n} = \sigma$$

La condition de glissement impose :

$$\vec{V}_e \cdot \vec{n} = 0$$

On a donc :

$$\vec{V}_i \cdot \vec{n} = - \sigma$$



soit :

$$\frac{1}{R} (\text{grad } \psi \wedge \vec{e}_\phi) \cdot \vec{n} = - \sigma$$

$$\frac{1}{R} \text{grad } \psi \cdot \vec{e}_l = + \sigma$$

$$\frac{1}{R} \text{grad } \psi \cdot \vec{e}_l d\ell = + \sigma d\ell$$

$$\frac{1}{R} d\psi = + \sigma d\ell$$

$$d\psi = + R \sigma d\ell$$

soit :

$$W_f = - \frac{2\pi}{V_o} \int_C R \sigma z d\ell$$

or :

$$dq = \sigma 2 \pi R d\ell$$

(1,11)

$$W_f = - \frac{1}{V_o} \int_C z dq$$

Dans le cas d'une répartition discontinue de sources à la surface du corps, on obtient :

$$(1,12) \quad W_f = - \frac{2\pi}{V_0} \sum_i z_i R_i \sigma_i$$

Le problème du calcul du volume ajouté est donc encore ramené à la détermination des singularités représentant le corps en mouvement. Remarquons que les formules (1,8) et (1,9) sont celles qui donnent le doublet équivalent dans le cas d'un corps axisymétrique se déplaçant parallèlement à son axe dans un milieu infini.

CAS D'UN PARALLELIPIPEDE RECTANGLE EN MILIEU FINI

Nous nous proposons d'illustrer, dans ce chapitre, la méthode de calcul du volume ajouté d'un corps par intégration du potentiel de l'écoulement sur la surface de ce corps. Pour cela, considérons un parallélipipède rectangle de longueur infinie (problème à deux dimensions), immergé dans un milieu fluide parfait compris entre deux plans parallèles et fixes, et tel que l'ensemble présente un plan de symétrie parallèle aux plans solides (figure 2,1). Ce parallélipipède effectue un mouvement de translation parallèle aux plans fixes et non uniforme. Nous allons étudier l'influence de la présence de parois sur le volume ajouté de cette poutre.

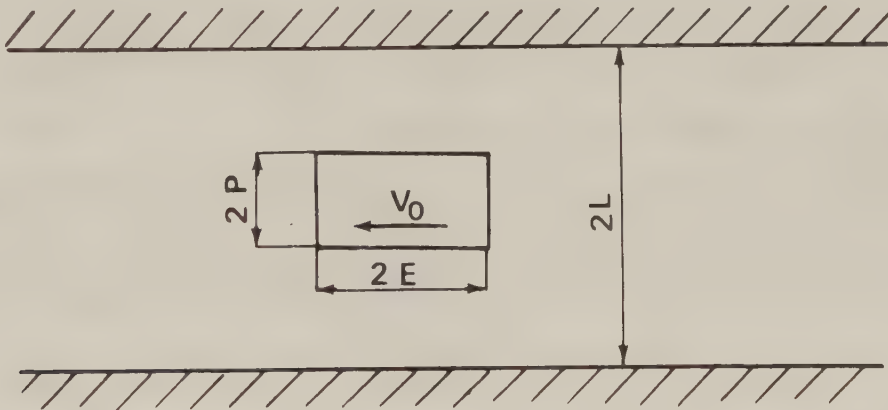
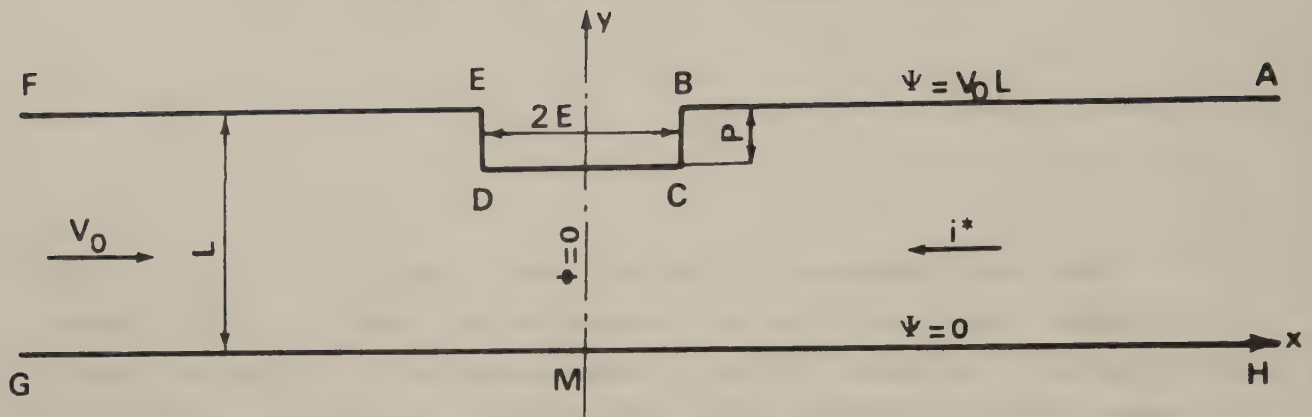


Fig. 2,1

La symétrie du problème nous permet de n'étudier que la moitié du domaine. Nous raisonnerons en mouvement relatif. Nous sommes donc conduits à étudier l'écoulement défini à la figure 2,2. La vitesse V_0 à l'infini est uniforme mais non constante dans le temps.



Plan z

Fig. 2,2

Nous prenons comme origine de la fonction courant le plan solide, il en résulte que sur l'autre limite du domaine, la ligne de courant A B C D E F, la fonction ψ est égale à $V_0 L$. Nous choisissons également de prendre la fonction ϕ nulle sur l'axe de symétrie de l'écoulement.

Compte tenu des symétries du problème et de ce que nous considérons un mouvement de translation, la formule fondamentale (1,4) montre qu'il existe une masse ajoutée que dans la direction du mouvement et qu'elle a pour expression :

$$M_a = \rho \left(-\vec{i}^* \cdot \iint_S \frac{\phi}{V_0} \vec{n} dS - \tau_0 \right)$$

où ϕ est le potentiel de l'écoulement relatif, $\vec{i}^*$ la direction du mouvement effectif.

Dans le plan z, on a :

$$z = x + iy$$

soit : $dz = dx + i dy$

La fonction de potentiel complexe s'écrit :

$$F(z) = \phi + i \psi$$

On a donc :

$$\begin{aligned} F(z).dz &= (\phi + i \psi) \cdot (dx + i dy) \\ &= (\phi dx - \psi dy) + i (\psi dx + \phi dy) \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\begin{array}{lll} \text{sur DE} & dx = 0 ; d\ell = dy & \text{et } F(z) dz = -\psi dy + i \phi dy \\ \text{sur BC} & dx = 0 ; d\ell = -dy & \text{et } F(z) dz = -\psi dy + i \phi dy \\ \text{sur CD} & dy = 0 ; d\ell = -dx & \text{et } F(z) dz = \phi dx + i \psi dx \end{array}$$

Nous calculerons, dans un premier temps, le volume ajouté du demi corps. Nous avons donc à calculer l'intégrale :

$$I = - \int_{BCDE} \vec{n} \cdot \vec{i}^* \frac{\phi}{V_o} d\ell = - (I_{BC} + I_{CD} + I_{DE})$$

Compte tenu des relations précédentes, il vient :

$$\text{sur BC} \quad \vec{n} \cdot \vec{i}^* = -1 \quad I_{BC} = i \int_{BC} \frac{F(z)}{V_o} dz$$

$$\text{sur DC} \quad \vec{n} \cdot \vec{i}^* = 0 \quad I_{CD} = 0$$

$$\text{sur DE} \quad \vec{n} \cdot \vec{i}^* = 1 \quad I_{DE} = i \int_{DE} \frac{F(z)}{V_o} dz$$

$$\text{soit :} \quad I = i \int_{BCDE} \frac{F(z)}{V_o} dz - i \int_{CD} \frac{F(z)}{V_o} dz$$

La fonction $F(z)$ ne présente pas de singularité dans le domaine limité par le contour fermé (c), ABCDEFGHA. On peut donc lui appliquer le théorème de Cauchy.

$$\int_{(c)} F(z) dz = 0$$

$$\text{donc :} \quad i \int_{(c)} F(z) dz = 0$$

Sur le segment AB

$$i \int_{AB} \frac{F(z)}{V_o} dz = i \int_{AB} \frac{\phi + i V_o L}{V_o} dx = L (x_B - x_A)$$

Sur le contour BCDE

Nous obtenons le premier terme de l'intégrale I.

Sur le segment EF

$$i \int_{EF} \frac{F(z)}{V_o} dz = i \int_{EF} \frac{\phi + i V_o L}{V_o} dx = L (x_F - x_E)$$

et compte tenu de la symétrie par rapport à l'axe oy

$$L (x_F - x_E) = L (x_B - x_A)$$

Sur le segment FG

$$i \int_{FG} \frac{F(z)}{V_o} dz = i \int_{FG} \frac{\phi_F + i\psi}{V_o} i dy = \int_{FG} \frac{\phi_F}{V_o} dy = - \frac{\phi_F}{V_o} L$$

Sur le segment GH

$$i \int_{GH} \frac{F(z)}{V_o} dz = i \int_{GH} \frac{\phi}{V_o} dx = 0$$

Sur le segment HA

$$i \int_{HA} \frac{F(z)}{V_o} dz = i \int_{HA} \frac{\phi_A + i\psi}{V_o} i dy = \int_{HA} \frac{\phi_A}{V_o} dy = \frac{\phi_A}{V_o} L$$

Nous avons encore :

$$\frac{\phi_A}{V_o} L = - \frac{\phi_F}{V_o} L$$

Nous obtenons donc :

$$i \int_{BCDE} \frac{F(z)}{V_o} dz = 2 L \left| x_A - x_B - \frac{\phi_A}{V_o} \right|$$

D'autre part :

$$i \int_{CD} \frac{F(z)}{V_o} dz = i \int_{CD} \frac{4}{V_o} dx = \int_{x_B}^{-x_B} \frac{V_o L}{V_o} dx = - 2 x_B L$$

On a donc :

$$(2,1) \quad I = - 2 L \left(x_A - \frac{\phi_A}{V_o} \right)$$

Le volume fictif de la demi poutre nous est donc donné par une formule qui fait intervenir la valeur du potentiel de l'écoulement à l'infini. Nous allons déterminer ce potentiel à l'aide d'une transformation conforme du domaine.

TRANSFORMATION DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL -

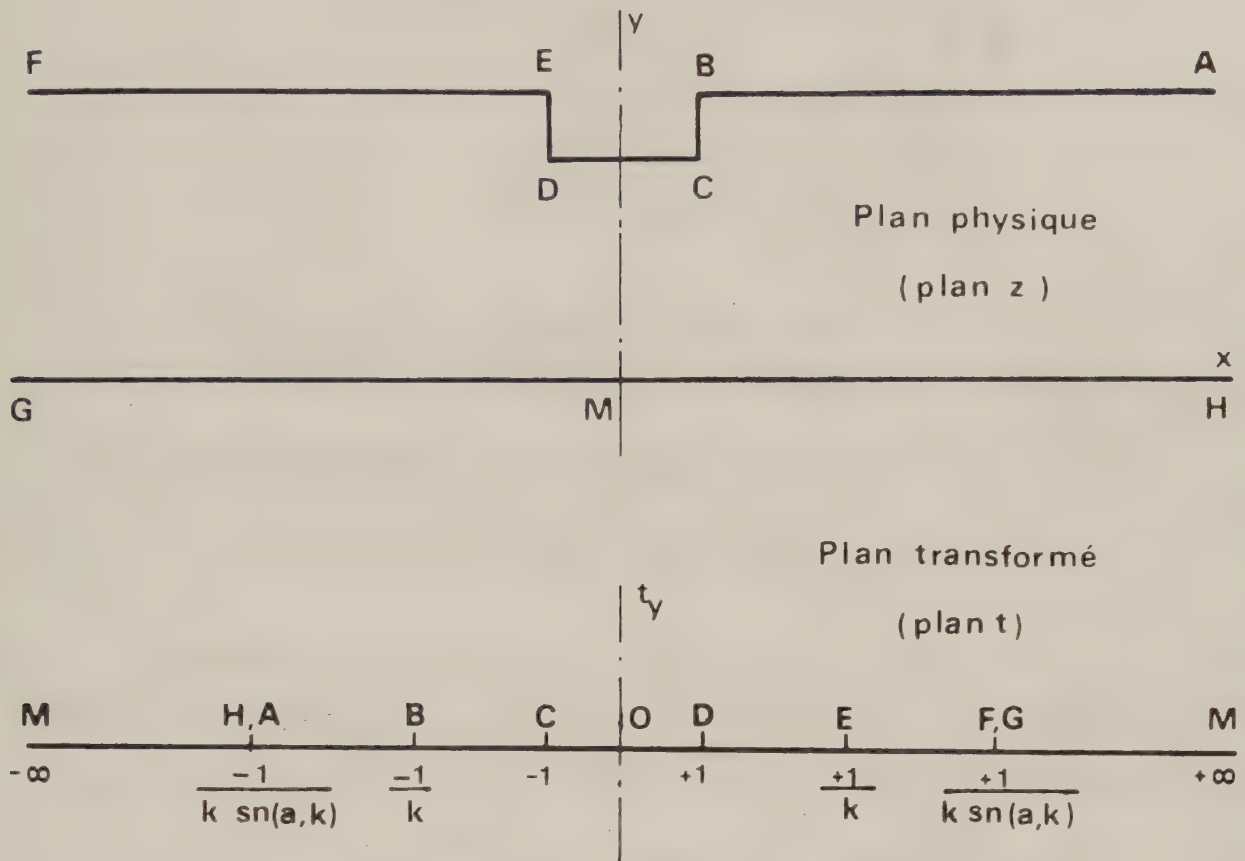


Fig. 2,3

Nous effectuons l'ouverture de la ligne polygonale ABCDEFGHA au point M en plaçant les points H et A à l'abscisse $\frac{-1}{k \operatorname{sn}(a,k)}$, les points F et G à l'abscisse $\frac{+1}{k \operatorname{sn}(a,k)}$ et enfin les points B et E respectivement aux abscisses $-\frac{1}{k}$ et $+\frac{1}{k}$. Ces choix conduiront par la suite à des expressions plus simples.

La formule générale de la transformation s'écrit :

$$\frac{dz}{dt} = M \left(t + \frac{1}{k \operatorname{sn}(a,k)} \right)^{-1} \left(t + \frac{1}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} (t+1)^{+\frac{1}{2}} (t-1)^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{k \operatorname{sn}(a,k)} \right)^{-1}$$

Sur le segment CD

En tenant compte du signe de chacun des termes dans ce cas, la formule générale s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= M \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2} - t^2\right) \left(t^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2(a,k)}\right)}} \\ &= -M \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-k^2 t^2}} \frac{k^3 \operatorname{sn}^2(a,k)}{1-k^2 t^2 \operatorname{sn}^2(a,k)} \\ &= -M k^3 \operatorname{sn}^2(a,k) \frac{1-t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \cdot \frac{1}{1-k^2 t^2 \operatorname{sn}^2(a,k)}\end{aligned}$$

On sait que la constante d'intégration est donnée par la formule suivante :

$$L = M \pi \prod_{j \neq i} (t_i - t_j)^{-\frac{\alpha}{\pi} j}$$

$$L = M \pi \left(-\frac{1}{k \operatorname{sn} a} + \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{k \operatorname{sn} a} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{k \operatorname{sn} a} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{k \operatorname{sn} a} - \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{k \operatorname{sn} a}\right)^{-1}$$

où, pour des questions de simplification d'écriture, on a posé : $\operatorname{sn}(a,k) = \operatorname{sn} a$

$$\begin{aligned}L &= M \pi \frac{\sqrt{\frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} - \frac{1}{k^2}}} \frac{k \operatorname{sn} a}{2} \\ &= \frac{M \pi}{2} k \frac{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a}}{\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 a}} \operatorname{sn} a \\ &= \frac{M \pi}{2} k \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn} a}\end{aligned}$$

Donc :

$$M = \frac{2}{\pi k} \frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a} L$$

Remarquons que sur la partie CD la variable z est réelle et que nous avons donc $dz = dx$, soit :

$$\frac{dx}{L} = -\frac{2}{\pi} k^2 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} \frac{1-t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \frac{1}{1-k^2 t^2 \operatorname{sn}^2 a} dt$$

En posant encore $\operatorname{sn}(u,k) = \operatorname{sn} u = t$

$$d\left(\frac{x}{L}\right) = -\frac{2}{\pi} k^2 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} \frac{1-\operatorname{sn}^2 u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} du$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} &= \frac{1 - \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \\ &= 1 - \operatorname{sn}^2 u \cdot \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \\ &= 1 - \operatorname{sn}^2 u \cdot \frac{\operatorname{dn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \end{aligned}$$

Donc :

$$d\left(\frac{x}{L}\right) = -\frac{2}{\pi} \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} - \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} \times \frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} du$$

Soit, en intégrant sur le segment CD :

$$\frac{E}{L} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} \cdot u \right]_0^K - \left[\pi^*(u, a, k) \right]_0^K$$

Remplaçons la fonction π^* par son expression

$$\frac{E}{L} = \frac{2}{\pi} K \left\{ k^2 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} - Z(a, k) \right\}$$

Mais, nous avons aussi :

$$Z(u) = Z(u-K) - k^2 \operatorname{sn}(u-K) \operatorname{sn} u$$

$$Z(u) = Z(u-K) + k^2 \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \operatorname{sn} u$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} - Z(a, k) &= -Z(a-K, k) \\ &= Z(K-a, k) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$(2,2) \quad \frac{E}{L} = \frac{2}{\pi} K Z(K-a, k)$$

Sur le segment DE

t est maintenant compris entre 1 et $\frac{1}{k}$ (k est inférieur à 1) ; nous pouvons toujours poser $t = \operatorname{sn} u$, mais u sera imaginaire, soit :

$$u = K + i \mu$$

Dans ces conditions, nous pouvons reprendre l'expression établie précédemment :

$$d\left(\frac{z}{L}\right) = -\frac{2}{\pi} k^2 \times \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} \times \frac{1 - \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} du$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left\{ \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} - \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} \times \frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \right\} du$$

Les bornes d'intégration sont pour D $t = 1$ soit $\mu = 0$
pour E $t = \frac{1}{k}$ soit $\mu = K'$

$$\left| \frac{z}{L} \right|_D^E = -\frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} u \right]_0^E - \left[\pi^*(u, a) \right]_0^E \right\}$$

$$\frac{z_E - z_D}{L} = -\frac{2}{\pi} \left\{ \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} i K' - \pi^*(K + i K', a) + \pi^*(K, a) \right\}$$

avec : $\pi^*(K, a) = K Z(a, k)$

et : $\pi^*(K + i K', a) = (K + i K') Z(a, k) + \frac{1}{2} \log \frac{\theta_4\left(\frac{K + i K' - a}{2K}\right)}{\theta_4\left(\frac{K + i K' + a}{2K}\right)}$

à l'aide des formules de transformations des fonctions θ_4 , on obtient :

$$\pi^*(K + i K', a) = (K + i K') Z(a, k) + i \frac{\pi a}{2K}$$

d'où : $\frac{z_E - z_D}{L} = -\frac{2}{\pi} \left\{ \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} i K' - i \frac{\pi a}{2K} - i K' Z(a, k) \right\}$

D'autre part $z_E - z_D = i P$

$$\frac{P}{L} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi a}{2K} + K' \left[Z(a, k) - \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} \right] \right\}$$

d'où on établit que :

$$(2,3) \quad \frac{P}{L} = \frac{a}{K} - \frac{2 K'}{\pi} Z(K-a, k)$$

soit, par comparaison avec la formule (2,2)

$$(2,4) \quad \frac{P}{L} = \frac{a}{K} - \frac{K'}{K} \cdot \frac{E}{L}$$

Sur le segment GM

t est maintenant supérieur à $\frac{1}{k \operatorname{sn} a}$

La formule générale de la transformation s'écrit encore :

$$\frac{dz}{dt} = M \frac{1}{t^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a}} \cdot \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{k^2}}}$$

$$dz = M \frac{t^2 - 1}{t^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1) (t^2 - \frac{1}{k^2})}}$$

or :

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a}} = 1 + \frac{\frac{\operatorname{dn}^2 a}{k^2 \operatorname{sn}^2 a}}{t^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a}}$$

$$dz = M \left\{ 1 + \frac{\operatorname{dn}^2 a}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} \times \frac{1}{t^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a}} \right\} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1) (t^2 - \frac{1}{k^2})}}$$

Posons maintenant : $t = \frac{1}{k \operatorname{sn} \mu}$

On a :

$$dt = -\frac{1}{k} \times \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \mu} \times \operatorname{cn} \mu \operatorname{dn} \mu d\mu$$

$$t^2 - 1 = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 \mu} - 1 = \frac{\operatorname{dn}^2 \mu}{k^2 \operatorname{sn}^2 \mu}$$

$$t^2 - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \mu} - 1 \right) = \frac{1}{k^2} \times \frac{\operatorname{cn}^2 \mu}{\operatorname{sn}^2 \mu}$$

Il vient :

$$\frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1) (t^2 - \frac{1}{k^2})}} = -k d\mu$$

et :

$$\frac{1}{t^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a}} = \frac{k^2}{\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \mu} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 a}} = \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 \mu}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 \mu}$$

soit :

$$dz = -M k \left\{ 1 - \operatorname{dn}^2 a \frac{\operatorname{sn}^2 \mu}{\operatorname{sn}^2 \mu - \operatorname{sn}^2 a} \right\} d\mu$$

$$= -M k \left\{ k^2 \operatorname{sn}^2 a - \frac{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{\operatorname{sn}^2 \mu - \operatorname{sn}^2 a} \right\} d\mu$$

$$= -M k \left\{ k^2 \operatorname{sn}^2 a + \frac{\operatorname{dn}^2 a}{1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \mu}{\operatorname{sn}^2 a}} \right\} d\mu$$

En remplaçant M par sa valeur que nous avons trouvée lors de l'étude sur le segment CD

$$d\left(\frac{z}{L}\right) = -\frac{2}{\pi} \left\{ k^2 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \mu}{\operatorname{sn}^2 a}} \right\} d\mu$$

Sur ce segment $z = x$, on obtient donc en intégrant :

$$\frac{x - x_M}{L} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\mu \left\{ k^2 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \mu}{\operatorname{sn}^2 a}} \right\} d\mu$$

$$x_M = 0 \quad \text{et} \quad 0 < \mu < a$$

$$\frac{x}{L} = -\frac{2}{\pi} \left\{ a k^2 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} + \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{\theta_1(\beta+v)}{\theta_1(\beta-v)} - \frac{\theta_4'(\beta)}{\theta_4(\beta)} v \right\}$$

avec : $\beta = \frac{a}{2K} ; \quad v = \frac{\mu}{2K}$

Dans notre étude, nous recherchons seulement l'expression de x_G , c'est-à-dire la valeur de x lorsque μ tend vers a . Posons donc $\mu = a - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, il vient également $v = \frac{a - \varepsilon}{2K}$; d'où :

$$\frac{x}{L} = -\frac{2}{\pi} \left\{ a \left[k^2 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} - \frac{\theta_4'(\beta)}{\theta_4(\beta)} \times \frac{1}{2K} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{\theta_1\left(\frac{a}{K}\right)}{\theta_1(\beta-v)} \right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left\{ a \left[k^2 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} - Z(a) \right] + \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{\theta_1\left(\frac{a}{K}\right)}{\theta_1(\beta-v)} \right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left\{ a Z(K-a, k) + \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{\theta_1\left(\frac{a}{K}\right)}{\theta_1(\beta-v)} \right\}$$

or : $\beta - v = \frac{\varepsilon}{2K}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{L} &= -\frac{2}{\pi} \left\{ a Z(K-a, k) + \frac{1}{2} \text{Log } \theta_1\left(\frac{a}{K}\right) - \frac{1}{2} \text{Log } \theta_1\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right) \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left\{ a Z(K-a, k) + \frac{1}{2} \text{Log } \theta_1\left(\frac{a}{K}\right) - \frac{1}{2} \text{Log } \left(\frac{\varepsilon}{2K} \theta_1'(0)\right) \right\} \\ (2,5) \quad \frac{x}{L} &= -\frac{2}{\pi} \left\{ a Z(K-a, k) + \frac{1}{2} \text{Log } \frac{2K \theta_1\left(\frac{a}{K}\right)}{\theta_1'(0)} - \frac{1}{2} \text{Log } \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi trouvé de manière implicite les valeurs des paramètres k et a du problème, de même que les expressions des données géométriques en fonction de ces paramètres. Il ne nous reste donc qu'à déterminer le potentiel de l'écoulement.

Expression du potentiel sur le segment GM

L'écoulement physique peut être représenté dans le plan transformé t en plaçant une source et un puits, de même intensité, respectivement aux points F, G et H, A . L'intensité commune vaut $2 V_0 L$, l'écoulement réel ne correspondant en fait qu'au demi plan supérieur.



Fig. 2,4

Dans ces conditions, l'expression générale du potentiel dans le plan transformé est donc :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{2 V_0 L}{2 \pi} \times \text{Log } \frac{t - \frac{1}{k \text{sn } a}}{t + \frac{1}{k \text{sn } a}} \\ t &= \frac{1}{k \text{sn } \mu} = \frac{1}{k \text{sn}(a-\varepsilon)} \\ \phi &= \frac{V_0 L}{\pi} \times \text{Log } \frac{\text{sn } a - \text{sn}(a-\varepsilon)}{2 \text{sn } a} \\ \text{sn}(a-\varepsilon) &= \text{sn } a - \varepsilon \text{cn } a . \text{dn } a \end{aligned}$$

$$\phi = \frac{V_o L}{\pi} \left\{ \text{Log } \varepsilon + \text{Log } \frac{\text{cn } a \text{ dn } a}{2 \text{ sn } a} \right\}$$

Sur le segment GM l'expression $2 L (x - \frac{\phi}{V_o})$ a donc pour valeur :

$$2 L (x - \frac{\phi}{V_o}) = \frac{2L^2}{\pi} \left\{ - 2 a Z(K-a, k) - \text{Log } \frac{2 K \theta_1(\frac{a}{K})}{\theta_1'(0)} - \text{Log } \frac{\text{cn } a \text{ dn } a}{2 \text{ sn } a} \right\}$$

Donc :

$$2 L (x_G - \frac{\phi_G}{V_o}) = - \frac{2 L^2}{\pi} \left\{ 2 a Z(K-a, k) + \text{Log } \left[\frac{\text{cn } a \text{ dn } a}{\text{sn } a} K \frac{\theta_1(\frac{a}{K})}{\theta_1'(0)} \right] \right\}$$

CALCUL DU VOLUME FICTIF DE LA POUTRE -

Nous avons vu que le volume fictif de la demi poutre nous était donné par la formule (2,1)

$$I = - 2 L (x_A - \frac{\phi_A}{V_o})$$

Vue la symétrie du problème, nous avons aussi :

$$I = + 2 L (x_G - \frac{\phi_G}{V_o})$$

Le volume fictif de la poutre entière est donc :

$$V_f = + 4 L (x_G - \frac{\phi_G}{V_o})$$

$$V_f = - \frac{4 L^2}{\pi} \left\{ 2 a Z(K-a, k) + 2 \text{Log } \left[\frac{\text{cn } a \text{ dn } a}{\text{sn } a} K \frac{\theta_1(\frac{a}{K})}{\theta_1'(0)} \right] \right\}$$

Remplaçons les fonctions sn, dn et cn par leur expression faisant intervenir les fonctions théta. Il vient :

$$(2,6) \quad V_f = - \frac{8 L^2}{\pi} \left\{ a Z(K-a, k) + \text{Log } \frac{\theta_2(\frac{a}{2K}) \theta_3(\frac{a}{2K})}{\theta_2(0) \theta_3(0)} \right\}$$

La solution littérale du problème est donc donnée par le groupe de relations :

$$(2,2) \quad \frac{E}{L} = \frac{2 K}{\pi} Z(K-a, k)$$

$$(2,4) \quad \frac{P}{L} = \frac{a}{K} - \frac{K'}{K} \times \frac{E}{L}$$

$$(2,6) \quad V_f = - \frac{8 L^2}{\pi} \left\{ a Z(K-a, k) + \text{Log} \frac{\theta_2\left(\frac{a}{2K}\right) \theta_3\left(\frac{a}{2K}\right)}{\theta_2(0) \theta_3(0)} \right\}$$

RESOLUTION NUMERIQUE -

Pour poursuivre numériquement cette étude, nous allons développer les expressions ci-dessus en série de la variable q , ($q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$). Ces développements présentent l'intérêt d'être rapidement convergents et donc de bien se prêter à une analyse numérique. Pour cela, effectuons les changements de variables $K-a = b$ et $v = \frac{b}{2K}$, il en résulte :

$$\frac{E}{L} = \frac{2 K}{\pi} Z(b, k)$$

$$(2,6^*) \quad V_f = - \frac{8 L^2}{\pi} \left\{ (1 - 2v) \frac{\pi}{2} \frac{E}{L} + \text{Log} \frac{\theta_1(v) \theta_4(v)}{\theta_2(0) \theta_3(0)} \right\}$$

$$\text{car :} \quad \frac{a}{2K} = \frac{K-b}{2K} = \frac{1}{2} - v$$

$$\begin{aligned} \text{et :} \quad \theta_2\left(-v + \frac{1}{2}\right) &= -\theta_1(-v) = \theta_1(v) \\ \theta_3\left(-v + \frac{1}{2}\right) &= \theta_4(-v) = \theta_4(v) \end{aligned}$$

Posons encore $u = 2v$ et remplaçons les fonctions Z et θ par leur expression en fonction de q .

$$\frac{P}{L} = 1 - u + \frac{4}{\pi} (\text{Log } q) \times \frac{q \sin \pi u - 2 q^4 \sin 2 \pi u + \dots}{1 - 2q \cos \pi u + 2 q^4 \cos 2 \pi u - \dots}$$

$$\frac{E}{L} = \left(1 - \frac{P}{L} - u\right) \frac{K}{K'}, \quad q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_f}{L^2} &= \frac{-8}{\pi} \left\{ (1-u) \frac{\pi}{2} \frac{E}{L} \right. \\ &\quad \left. + \text{Log} \frac{(1-2q \cos \pi u + 2 q^4 \cos 2 \pi u - 2 q^9 \cos 3 \pi u) (\sin \frac{\pi}{2} u - q^2 \sin \frac{3\pi}{2} u + q^6 \sin \frac{5\pi}{2} u)}{(1 + q^2 + q^6) (1 + 2q + 2 q^4 + 2 q^9)} \right\} \end{aligned}$$

Ces développements ne sont valables que pour des q inférieurs à 0,4.

$$0 < q < 0,4$$

La difficulté de cette résolution numérique réside en la détermination des paramètres q et u . Pour l'effectuer, nous procédons par approximations successives, en ayant remarqué que les fonctions $\frac{P}{L}$ et $\frac{E}{L}$ varient dans le même sens que q pour un u donné (voir l'organigramme figure 2,5).

Les valeurs de ces paramètres étant utiles pour la résolution de nombreux autres problèmes, nous les donnons en annexe.

$$q > 0,4$$

Lorsque le paramètre q , ($q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$) devient trop grand pour que les développements précédents puissent encore être valables, le paramètre q' ($q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}}$) est, lui, petit. Nous pouvons donc, dans ce cas, développer nos expressions en séries de puissances de q' .

$$Z(u, k) = \frac{1}{2K} \frac{\theta_4'(v, q)}{\theta_4(v, q)} \quad \text{avec} \quad v = \frac{u}{2K}$$

Soit :

$$Z(u, k) = \frac{1}{2K} \frac{d}{dv} (\text{Log } \theta_4(v, q))$$

Posons $\tau = i \frac{K'}{K}$, la transformation de Jacobi conduit à :

$$\theta_4(v, q) = \left(\frac{1}{-i\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\pi \frac{v^2}{\tau}} \theta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)$$

$$\text{Log } \theta_4(v, q) = -\frac{1}{2} \text{Log } -\frac{i}{\tau} - i\pi \frac{v^2}{\tau} + \text{Log } \theta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} (\text{Log } \theta_4(v, q)) &= -2i\pi \frac{v}{\tau} + \frac{d}{dv} (\text{Log } \theta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)) \\ &= -2i\pi \frac{v}{\tau} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\left(\frac{v}{\tau}\right)} (\text{Log } \theta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)) \\ &= -2i\pi \frac{v}{\tau} + \frac{1}{\tau} \frac{\theta_2'\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)}{\theta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)} \end{aligned}$$

$$Z(u, k) = \frac{1}{2K} \left\{ \frac{1}{\tau} \frac{\theta_2'(\frac{v}{\tau}, q')}{\theta_2(\frac{v}{\tau}, q')} - 2i\pi \frac{v}{\tau} \right\}$$

$$= \frac{1}{2K} \left\{ \frac{K}{iK'} \times \frac{\theta_2'(\frac{v}{\tau}, q')}{\theta_2(\frac{v}{\tau}, q')} - \pi \times \frac{u}{K'} \right\}$$

Soit $v^* = \frac{u}{2K'}$, développons maintenant les fonctions thêta en série de puissances de q' , on obtient :

$$(2,7) \quad Z(u, k) = \frac{\pi}{2K} \left\{ \frac{K}{K'} \times \frac{\text{sh } \pi v^* + 3q'^2 \text{sh } 3\pi v^* + 5q'^6 \text{sh } 5\pi v^* + 7q'^{12} \text{sh } 7\pi v^*}{\text{ch } \pi v^* + q'^2 \text{ch } 3\pi v^* + q'^6 \text{ch } 5\pi v^* + q'^{12} \text{ch } 7\pi v^*} - 2v^* \right\}$$

Les relations (2,2) et (2,4) s'écrivent alors, avec $v^* = \frac{b}{2K'}$,

$$(2,2') \quad 1 - \frac{P}{L} = \frac{\text{sh } \pi v^* + 3q'^2 \text{sh } 3\pi v^* + 5q'^6 \text{sh } 5\pi v^*}{\text{ch } \pi v^* + q'^2 \text{ch } 3\pi v^* + q'^6 \text{ch } 5\pi v^*}$$

$$(2,4') \quad 1 - \frac{P}{L} = \frac{K'}{K} \left| 2v^* + \frac{E}{L} \right|$$

Nous avons le groupe de relations :

$$\theta_1(v, q) = i\sqrt{\frac{K'}{K}} e^{-\pi \frac{K}{K'} v^2} \theta_1\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)$$

$$\theta_4(v, q) = \sqrt{\frac{K'}{K}} e^{-\pi \frac{K}{K'} v^2} \theta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)$$

$$\theta_2(0, q) = \sqrt{\frac{K'}{K}} \theta_4(0, q')$$

$$\theta_3(0, q) = \sqrt{\frac{K'}{K}} \theta_3(0, q')$$

Soit :

$$\text{Log } \frac{\theta_1(v, q) \theta_4(v, q)}{\theta_2(0, q) \theta_3(0, q)} = -2\pi \frac{K}{K'} v^2 + \text{Log } \frac{i \theta_1(\frac{v}{\tau}, q') \theta_2(\frac{v}{\tau}, q')}{\theta_3(0, q') \theta_4(0, q')}$$

ce qui peut s'écrire en prenant comme nouvel argument q'^2

$$\text{Log } \frac{\theta_1(v, q) \theta_4(v, q)}{\theta_2(0, q) \theta_3(0, q)} = -2\pi \frac{K}{K'} v^2 + \text{Log } \frac{i \theta_1(\frac{2v}{\tau}, q'^2)}{\theta_4(0, q'^2)}$$

$$= -2\pi \frac{K'}{K} v^{*2} + \text{Log } \frac{-i \theta_1(2iv^*, q'^2)}{\theta_4(0, q'^2)}$$

$$\text{or : } \theta_1(2iv^*, q'^2) = 2(q')^{\frac{1}{2}} i [\text{sh } 2 \pi v^* - q'^4 \text{sh } 6 \pi v^* + q'^{12} \text{sh } 10 \pi v^* + \dots]$$

D'où, en tenant compte de (2,7), le volume fictif, formule(2,6*), s'écrit :

$$V_f = -\frac{8 L^2}{\pi} \left\{ (1 - 2 \frac{K'}{K} v^*) \frac{\pi}{2} \frac{E}{L} - 2 \pi \frac{K'}{K} v^{*2} - \frac{\pi}{2} \frac{K'}{K}, \right. \\ \left. + \text{Log } (2 \times \frac{\text{sh } 2 \pi v^* - q'^4 \text{sh } 6 \pi v^* + q'^{12} \text{sh } 10 \pi v^*}{1 - 2 q'^2 + 2 q'^8}) \right\}$$

$$\text{or : } (1 - 2 \frac{K'}{K} v^*) \frac{\pi}{2} \frac{E}{L} - 2 \pi \frac{K'}{K} v^{*2} - \frac{\pi}{2} \frac{K'}{K}, = \frac{\pi}{2} (\frac{E}{L} - \frac{K'}{K},) - \pi v^* (1 - \frac{P}{L})$$

Soit :

$$(2,6') \quad V_f = -\frac{8 L^2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} (\frac{E}{L} - \frac{K'}{K},) - \pi v^* (1 - \frac{P}{L}) + \text{Log } (2 \times \frac{\text{sh } 2 \pi v^* - q'^4 \text{sh } 6 \pi v^*}{1 - 2 q'^2}) \right\}$$

Etudions le volume ajouté de la poutre :

$$V_a = V_f - V_r$$

$$V_r = 4 L^2 \frac{E}{L} \frac{P}{L}$$

$$V_a = -4 L^2 \left\{ \frac{E}{L} - \frac{K'}{K}, - 2v^* (1 - \frac{P}{L}) + \frac{E}{L} \times \frac{P}{L} + \frac{2}{\pi} \text{Log } 2 \frac{\text{sh } 2 \pi v^* - q'^4 \text{sh } 6 \pi v^*}{1 - 2 q'^2} \right\}$$

$$(2,4') \Rightarrow V_a = -4 L^2 \left\{ \frac{E}{L} (1 + \frac{P}{L}) - \frac{2v^* + \frac{E}{L}}{1 - \frac{P}{L}} - 2v^* (1 - \frac{P}{L}) + \frac{2}{\pi} \text{Log } 2 \frac{\text{sh } 2 \pi v^* - q'^4 \text{sh } 6 \pi v^*}{1 - 2 q'^2} \right\}$$

$$V_a = 4 L^2 \left\{ \frac{E}{L} \left[\frac{1}{1 - \frac{P}{L}} - (1 + \frac{P}{L}) \right] + 2v^* \left[(1 - \frac{P}{L}) + \frac{1}{(1 - \frac{P}{L})} \right] + \frac{2}{\pi} \text{Log } \frac{2 \text{sh } \pi v^*}{1 - 2 q'^2} \right\}$$

Pour $\frac{P}{L}$ donné et pour des q non petits, le volume ajouté de la poutre est une fonction linéaire de $\frac{E}{L}$, donc de sa longueur. La pente de ces droites est :

$$p = 4 \left[\frac{1}{1 - \frac{P}{L}} - (1 + \frac{P}{L}) \right]$$

ETUDE DU CAS E/L TRES PETIT - TANGENTE A L'ORIGINE -

Nous avons obtenu les développements suivants qui sont valables si $q < 0,4$.

$$\frac{P}{L} = 1 - u + \frac{4}{\pi} \text{Log } q \frac{q \sin \pi u - 2q^4 \sin 2\pi u + \dots}{1 - 2q \cos \pi u + 2q^4 \cos 2\pi u + \dots}$$

$$\frac{E}{L} = 4q \sin \pi u \quad \text{soit} \quad q = \frac{E}{L} \frac{1}{4 \sin \pi u}$$

La condition $\frac{E}{L}$ petit avec $\frac{P}{L}$ quelconque impose q petit et u quelconque. Remarquons que le cas $\frac{P}{L} = 0$, L n'étant pas infiniment grand, est le cas trivial où la poutre est infiniment mince. Il est alors évident que son volume ajouté est nul quelque soit la valeur de $\frac{E}{L}$; nous n'étudierons donc pas ce cas en détail.

q très petit implique, en se limitant aux termes du premier ordre :

$$\frac{P}{L} = 1 - u + \frac{4}{\pi} q \pi u \text{Log } q = 1 - u + \frac{1}{\pi} \frac{E}{L} \text{Log } \frac{\frac{E}{L}}{4 \sin \pi u}$$

L'expression du volume ajouté devient alors :

$$\frac{V_a}{L^2} = -\frac{8}{\pi} \left\{ \left| 1 - u + \frac{P}{L} \right| \frac{\pi}{2} \frac{E}{L} + \text{Log } \sin \frac{\pi}{2} u + \text{Log } \frac{1 - 2q \cos \pi u}{1 + 2q} \right\}$$

Soit :

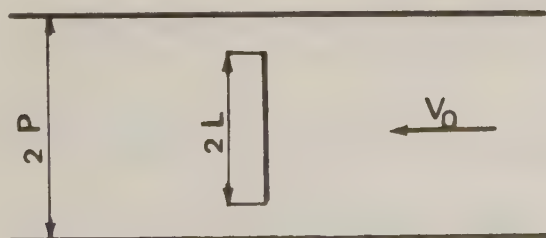
$$\frac{V_a}{L^2} = -\frac{8}{\pi} \left\{ \pi \frac{P}{L} \frac{E}{L} - \frac{\left(\frac{E}{L}\right)^2}{2} \text{Log } \frac{\frac{E}{L}}{4 \sin \pi u} + \text{Log } \sin \frac{\pi}{2} u - \frac{E}{L} \frac{1 + \cos \pi u}{2 \sin \pi u} \right\}$$

$$\frac{V_a}{L^2} = -\frac{8}{\pi} \left\{ \text{Log } \sin \frac{\pi}{2} u + \pi \frac{P}{L} \frac{E}{L} - \frac{1}{2} \frac{E}{L} \frac{1}{\text{tg } \frac{\pi}{2} u} + \frac{1}{2} \left(\frac{E}{L}\right)^2 \left(\text{Log } 4 \sin \pi u - \text{Log } \frac{E}{L} \right) \right\}$$

Il apparaît donc dans l'expression du volume ajouté un terme indépendant de E/L . Ce terme est la valeur de V_a/L^2 pour $E/L = 0$, donc pour $q = 0$. Il vient alors $\frac{P}{L} = 1 - u$, soit :

$$\frac{V_a}{L^2} = -\frac{8}{\pi} \text{Log } \cos \frac{\pi}{2} \frac{P}{L}$$

Nous avons obtenu ainsi la valeur du volume ajouté d'une plaque mince de largeur $2P$ centrée dans un canal de largeur $2L$.



$$(2,8) \quad V_a = -\frac{8}{\pi} L^2 \operatorname{Log} \frac{1}{\cos \frac{\pi P}{2L}}$$

Recherchons maintenant la valeur de la pente de la tangente à l'origine des courbes $\frac{V_a}{L^2} \left(\frac{E}{L}\right)$. Pour cela, nous tirons de la relation qui lie P/L et E/L la valeur de la dérivée $\frac{du}{d\left(\frac{E}{L}\right)}$, nous en déduirons aisément :

$$\left[\frac{d \frac{V_a}{L^2}}{d \frac{E}{L}} \right]_{\frac{E}{L}} = 0 \quad \text{à } P/L \text{ constant}$$

$$u - \frac{1}{\pi} \frac{E}{L} \operatorname{Log} \frac{\frac{E}{L}}{4 \sin \pi u} = 1 - \frac{P}{L}$$

$$\left(1 + \frac{E}{L} \frac{1}{\operatorname{tg} \pi u}\right) du - \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{Log} \frac{E}{L} + 1 - \operatorname{Log} 4 \sin \pi u\right) d \frac{E}{L} = 0$$

$$\frac{du}{d\left(\frac{E}{L}\right)} = \frac{\frac{1}{\pi} \left(\operatorname{Log} \frac{E}{L} + 1 - \operatorname{Log} 4 \sin \pi u\right)}{1 + \frac{E}{L} \frac{1}{\operatorname{tg} \pi u}}$$

donc : $\frac{du}{d\left(\frac{E}{L}\right)} \rightarrow -\infty \quad \text{si} \quad \frac{E}{L} \rightarrow 0$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{d \frac{V_a}{L^2}}{d\left(\frac{E}{L}\right)} = & -\frac{8}{\pi} \left\{ \pi \frac{P}{L} - \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} u} + \frac{E}{L} \left(\operatorname{Log} 4 \sin \pi u - \operatorname{Log} \frac{E}{L} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + \left[\frac{\pi}{4} \frac{E}{L} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2} u} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{E}{L}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{tg} \pi u} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} u} \right] \frac{du}{d \frac{E}{L}} \right\} \end{aligned}$$

Si $\frac{E}{L} \rightarrow 0$

$$\frac{d \frac{V_a}{L^2}}{d \frac{E}{L}} \rightarrow -\frac{8}{\pi} \left\{ \pi \frac{P}{L} - \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} u} + \left[\frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} u} \right] \left[\frac{du}{d \frac{E}{L}} \right] \frac{E}{L} = 0 \right\}$$

La pente de la tangente à l'origine est donc plus l'infini, sauf si $u = 1$, mais ceci est le cas trivial que nous avons éliminé.

CAS DU FLUIDE ILLIMITE -

Nous allons étudier maintenant le cas d'un parallélépipède en mouvement de translation dans un milieu infini. Nous avons déjà fait cette étude dans notre diplôme d'étude approfondie, mais par une méthode directe ; nous allons maintenant traiter ce cas comme une dégénérescence du cas général de la poutre entre deux parois.

Nous considérons donc le cas où L tend vers l'infini. Les points A, F, G et H de notre transformation conforme sont donc rejetés à l'infini et donc $\operatorname{sn}(a, k)$ tend vers 0, soit, a tend vers 0.

$$\text{Nous avons : } \frac{E}{L} = \frac{2 K}{\pi} Z(K-a/k)$$

$$\text{mais : } Z(K-a) = E(K-a) - (K-a) \frac{E}{K}$$

$$\text{et : } E(K-a) = E - a E'(K)$$

$$\text{or : } E'(u) = \operatorname{dn}^2 u \quad \text{soit} \quad E'(K) = \operatorname{dn}^2 K = k'^2$$

On a donc :

$$(2,9) \quad \frac{E}{L} = \frac{2}{\pi} (E - k'^2 K) a$$

De même, nous avons :

$$\frac{P}{L} = \frac{a}{K} - \frac{K'}{K} \frac{2}{\pi} (E - k'^2 K) a$$

$$\text{soit : } \frac{P}{L} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - K' (E - k'^2 K) \right] \frac{a}{K}$$

Or, l'identité de Legendre s'écrit :

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$(2,10) \quad \frac{P}{L} = \frac{2}{\pi} [E' - k'^2 K'] a$$

soit :

$$(2,11) \quad \frac{E}{P} = \frac{k'^2 K - E}{k'^2 K' - E'}$$

Le volume fictif a pour expression générale :

$$V_f = -\frac{8}{\pi} L^2 \left\{ a Z(K-a/k) + \operatorname{Log} \left[\frac{\operatorname{cn} a \cdot \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} K \frac{\theta_1(\frac{a}{K})}{\theta_1'(0)} \right] \right\}$$

$$\text{soit : } V_f = -\frac{8}{\pi} L^2 \left\{ a^2 \left(\frac{E}{K} - k'^2 \right) + \operatorname{Log} \operatorname{cn} a \cdot \operatorname{dn} a + 2 \operatorname{Log} \frac{\theta_4(v)}{\theta_4(0)} \right\}$$

$$\text{avec } v = \frac{a}{2 K}$$

Si a tend vers 0, nous avons :

$$\text{d'une part : } \text{Log} (\text{cn } a \cdot \text{dn } a) \rightarrow \text{Log} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \left(1 - \frac{k^2 a^2}{2}\right)$$

$$\text{soit : } \text{Log} (\text{cn } a \cdot \text{dn } a) \underset{a \rightarrow 0}{\approx} - \left(\frac{1+k^2}{2}\right) a^2$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \text{Log} \frac{\theta_4(v)}{\theta_4(0)} &\rightarrow \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \text{Log} \frac{\theta_4(v)}{\theta_4(0)} = \frac{a^2}{2} \frac{1}{4 K^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \text{Log} \theta_4(v) \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{1}{4 K^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\theta_4'(v)}{\theta_4(v)} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{1}{2 K} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2 K} \frac{\theta_4'(v)}{\theta_4(v)} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{1}{2 K} \frac{\partial}{\partial v} Z(a) = \frac{a^2}{2} \frac{\partial}{\partial a} Z(a) \end{aligned}$$

$$\text{Log} \frac{\theta_4(v)}{\theta_4(0)} \underset{a \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{a^2}{2} \left[E'(a) - \frac{E}{K} \right]$$

$$\text{or : } E'(a) = \text{dn}^2(a) ; E'(a) \rightarrow 1 \text{ si } a \rightarrow 0$$

$$\text{donc : } \text{Log} \frac{\theta_4(v)}{\theta_4(0)} \underset{a \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{a^2}{2} \left[1 - \frac{E}{K} \right]$$

$$\text{soit : } V_f \underset{a \rightarrow 0}{\approx} \frac{4}{\pi} L^2 k'^2 a^2$$

Les relations (2,9) et (2,10) conduisent à écrire :

$$\frac{P}{L} \times \frac{E}{L} = \frac{4}{\pi^2} (k^2 K' - E') (k'^2 K - E)$$

d'où les expressions finales du volume fictif et du volume ajouté d'un parallélépipède rectangle oscillant dans un milieu fluide infini.

$$V_f = \frac{\pi k'^2}{(k^2 K' - E') (k'^2 K - E)} \times E \times P$$

$$V_a = \left(\frac{\pi k'^2}{(k^2 K' - E') (k'^2 K - E)} - 4 \right) \times E \times P$$

L'usage des tables des fonctions elliptiques complètes permet de tracer facilement la courbe $V_a\left(\frac{E}{P}\right)$ en fonction du paramètre k^2 .

PROGRAMME D'APPEL
DEFINITION DU CORPS

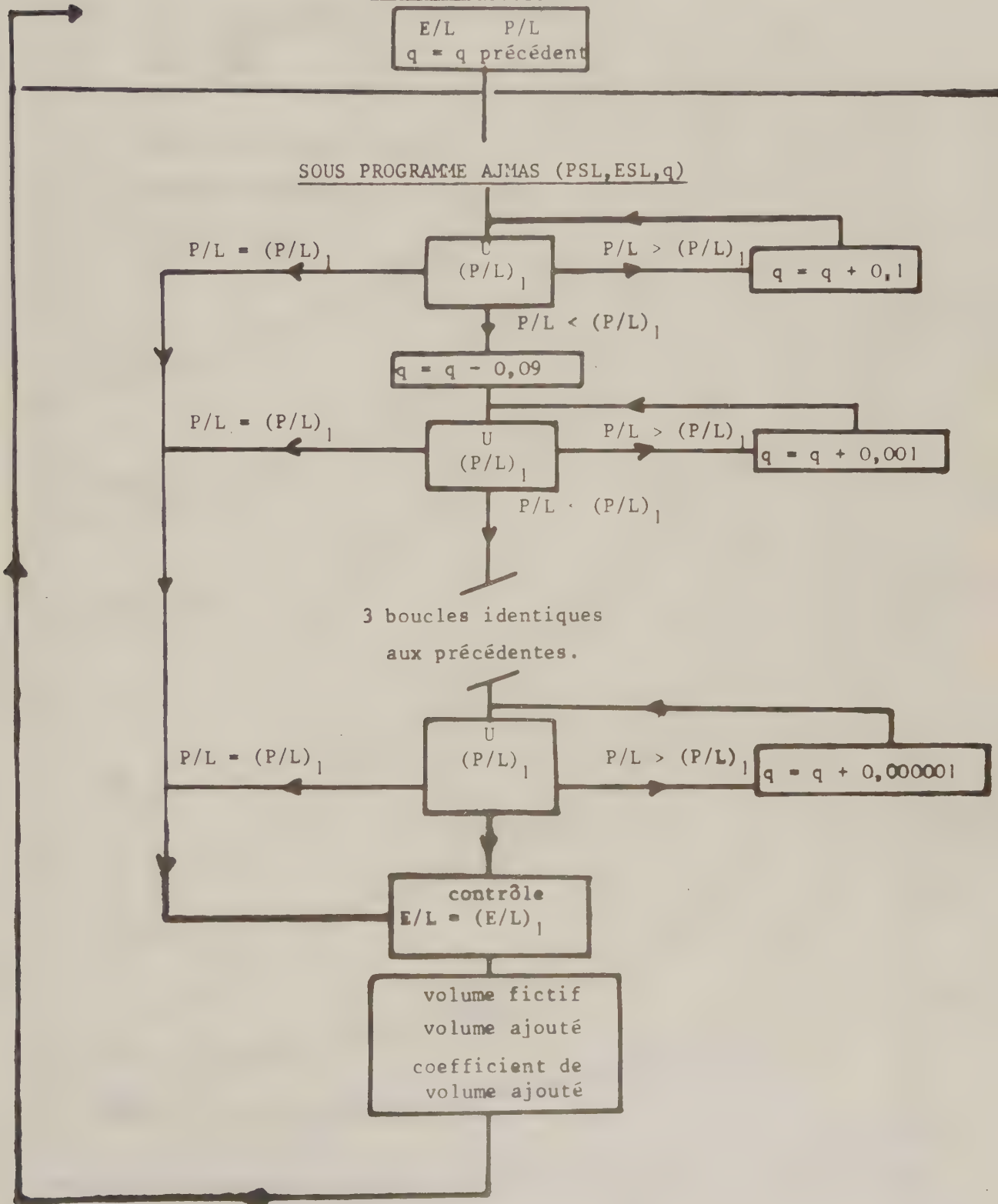


Fig. 2,5

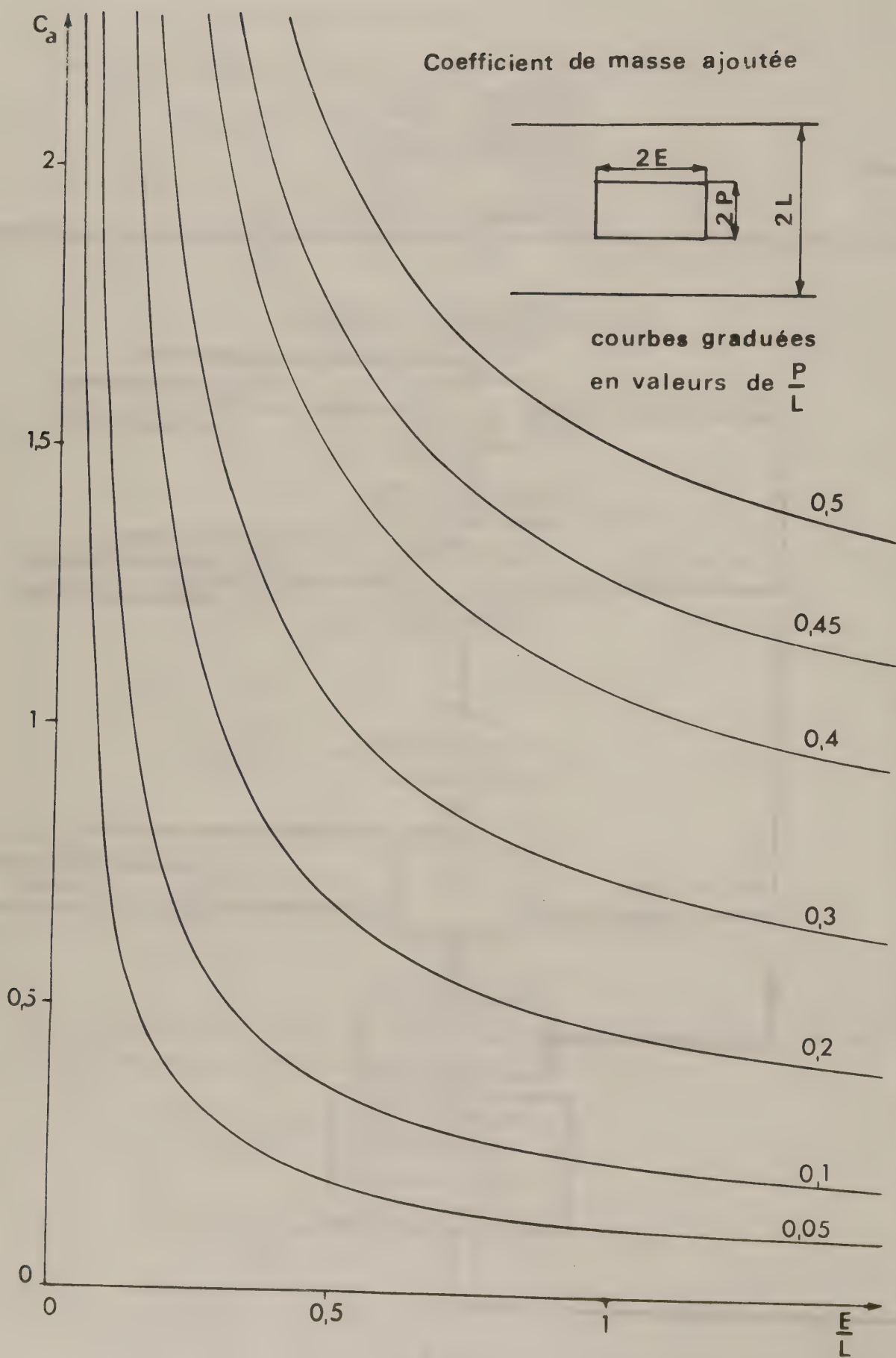
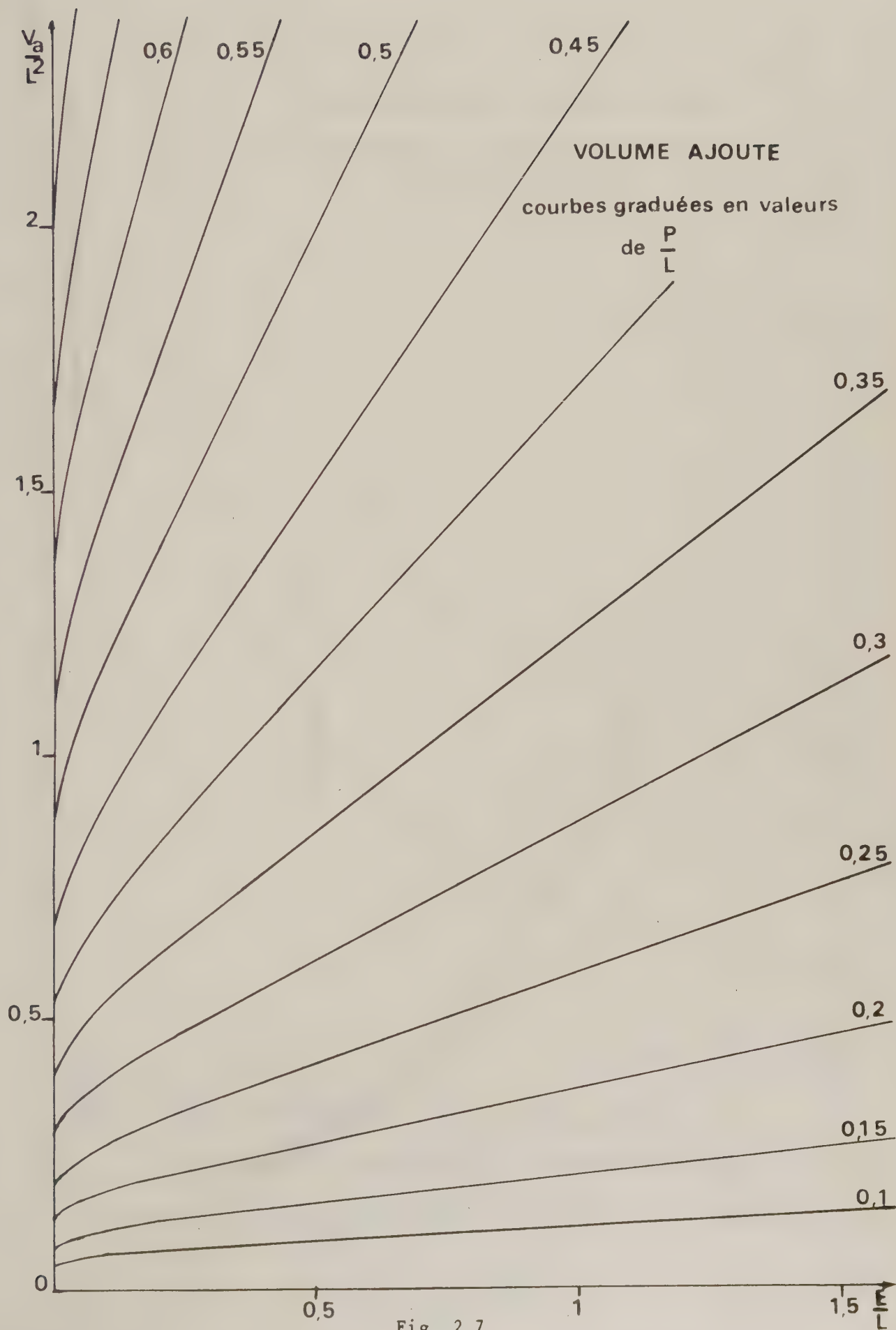


Fig. 2,6



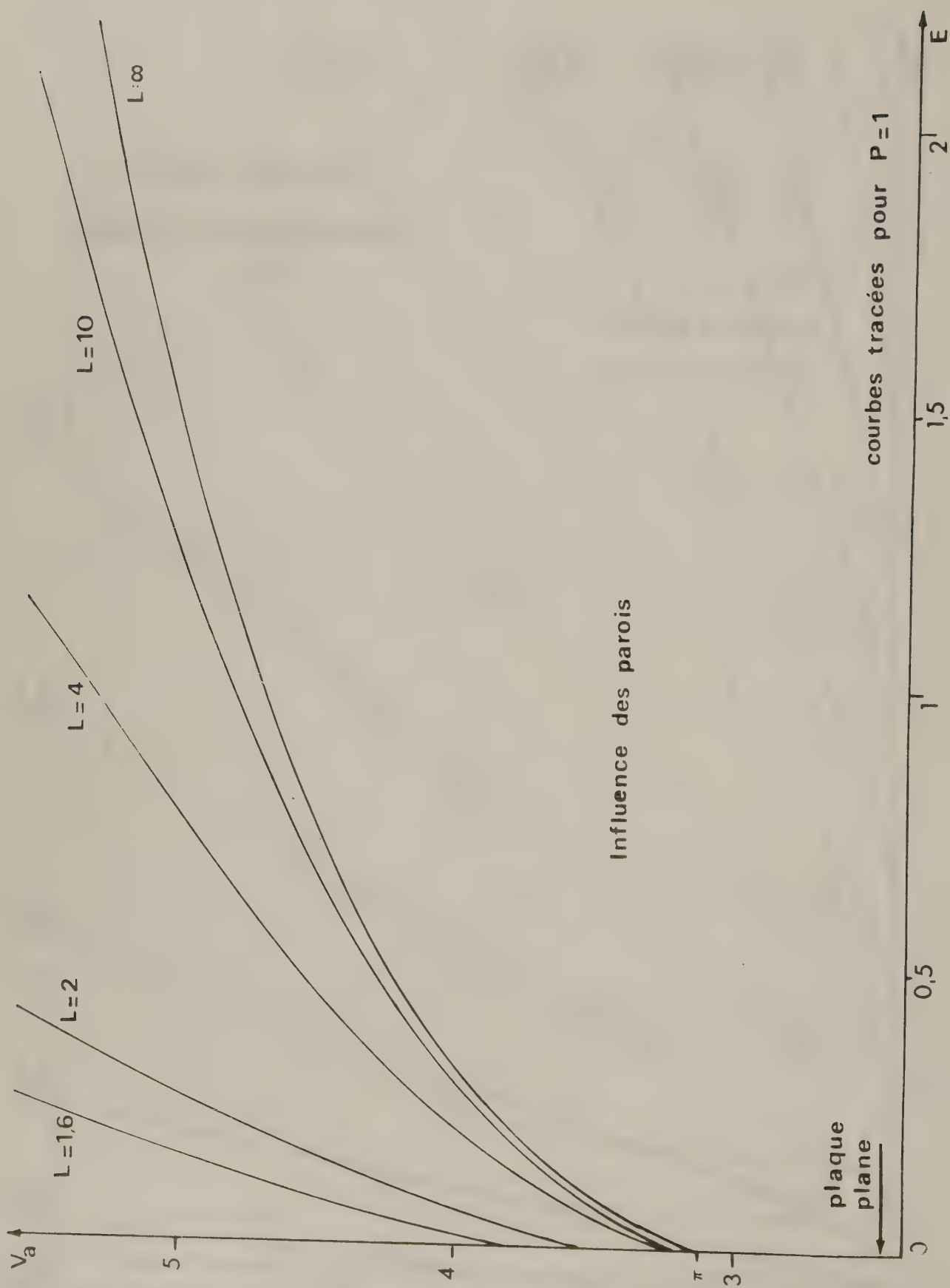


Fig. 2,8

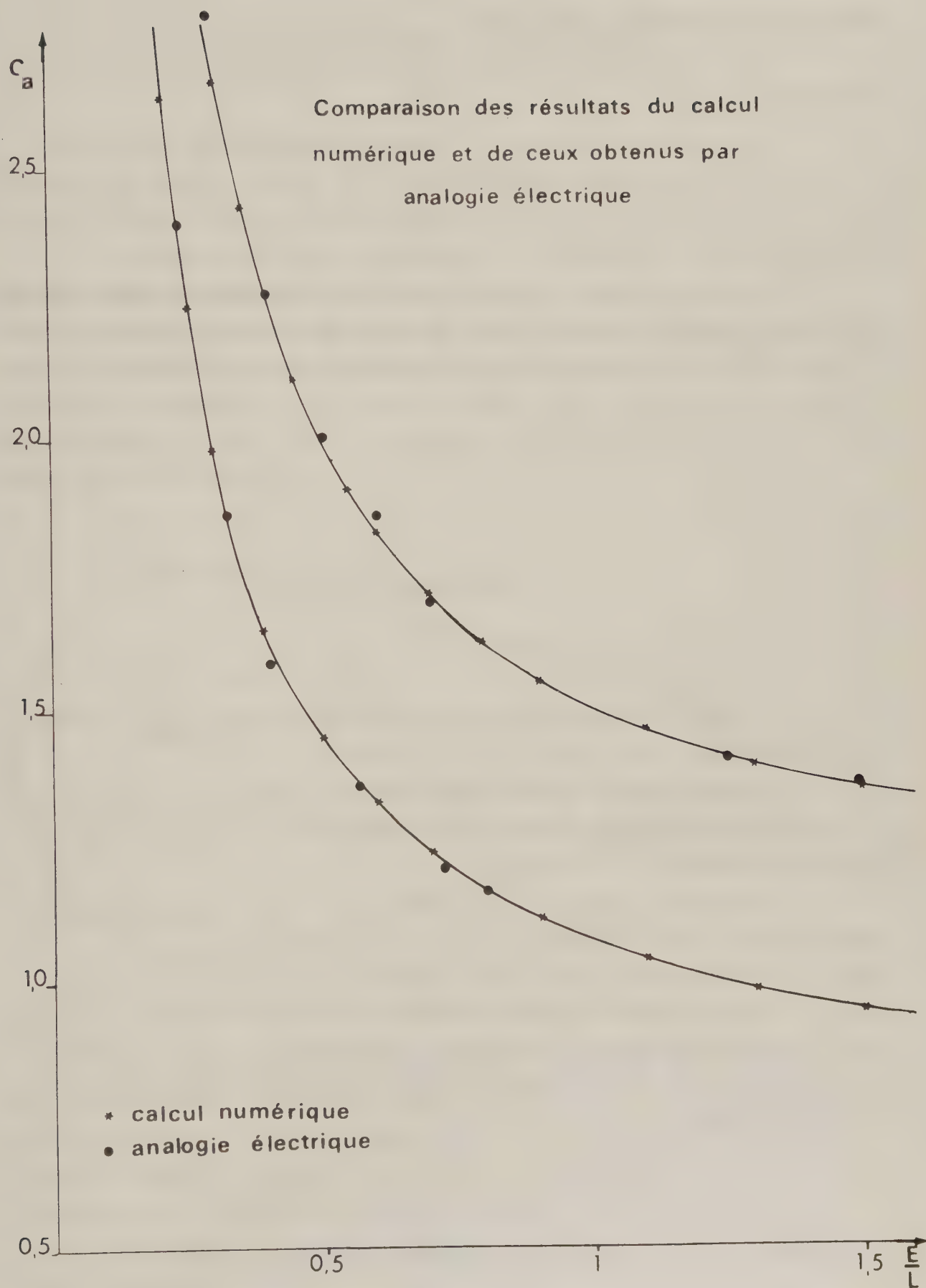


Fig. 2,9

Vérification par analogie électrique

Nous avons procédé à une vérification par analogie électrique de la validité de nos calculs.

La recherche du potentiel le long du parallélépipède est effectuée à l'aide d'une bande de papier télédeltos où l'on découpe l'image des contours solides. On obtient le volume ajouté en planimétrant la courbe de variation de ce potentiel.

On a tracé, figure 2,10, les courbes de variations du coefficient de volume ajouté pour $\frac{P}{L} = 0,4$ et $\frac{P}{L} = 0,5$, obtenues par le calcul numérique et par analogie électrique. On constate qu'il y a identité de ces courbes.

CONCLUSION

L'ensemble des résultats de ce chapitre est résumé par les courbes 2,6 - 2,7 et 2,8.

Les deux premiers réseaux présentent les variations du volume ajouté et du coefficient de volume ajouté du parallélépipède rectangle pour une largeur donnée du canal.

Les dernières courbes mettent en évidence l'effet des parois sur le volume ajouté du parallélépipède. Il est remarquable que plus le corps est voisin de la plaque plane ($\frac{E}{P} = 0$) moins l'influence des parois est importante. Ainsi, lorsque la largeur du canal est égale au double de l'épaisseur du parallélépipède, le volume ajouté d'une plaque plane en milieu infini est multiplié par 1,14, alors qu'il est multiplié par 1,92 pour un corps dont le rapport des cotés, $\frac{E}{P}$, vaut 0,5.

CORPS AXISYMETRIQUES EN MILIEU INFINI

Ce chapitre sera une illustration de la méthode de calcul du volume ajouté d'un corps par son doublet équivalent.

Nous allons mettre au point un sous-programme FORTRAN, tel qu'il nous suffira d'introduire un programme d'appel définissant le corps à étudier pour en obtenir directement le coefficient de masse ajoutée. Nous étudierons ensuite sa fiabilité en traitant plusieurs cas dont les résultats exacts ont déjà été trouvés par voie analytique.

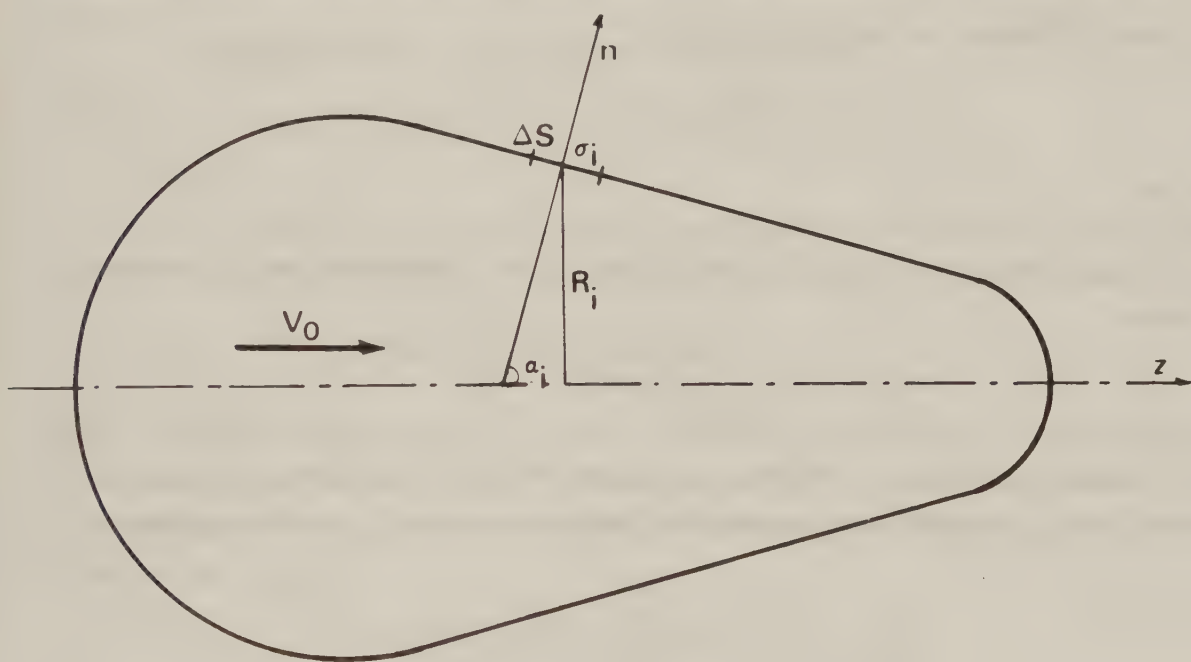


Fig. 3,1

Nous nous proposons de représenter l'écoulement réel en le construisant comme la somme d'écoulements créés par des singularités élémentaires. Ceci peut être réalisé à l'aide de singularités du type sources, doublets ou tourbillons, disposées à l'intérieur du corps ou sur sa surface. Nous choisissons une répartition discontinue de sources superficielles.

Cette méthode a été introduite par Smith et Pierce pour des écoulements de révolutions.

Soit une surface quelconque, figure 3,2, placée dans un courant uniforme à l'infini. Mettons au point P une densité de source σ .

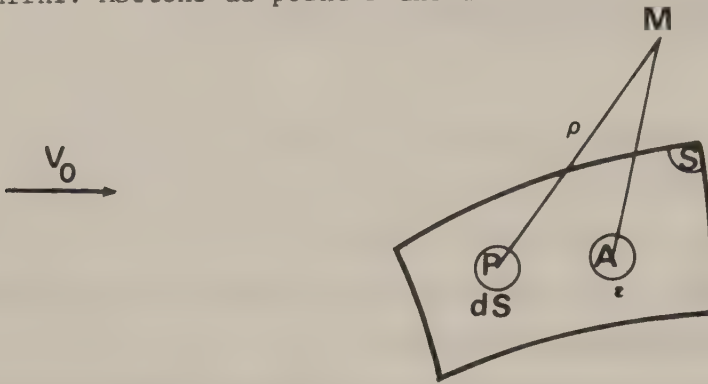


Fig. 3,2

En M, point à l'extérieur de la surface, le potentiel dû aux sources réparties sur l'élément de surface dS est :

$$d\phi_M = -\frac{\sigma_P}{4\pi\rho} dS$$

avec $\rho = PM$

Le potentiel total, dû à toutes les sources réparties sur la surface (S) est alors :

$$\phi_M = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\sigma_P}{\rho} dS$$

On peut calculer la dérivée de ce potentiel et sa limite lorsque le point M tend vers un point quelconque A de la surface. D'où, sur la surface du corps :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_A = V_A - \frac{1}{4\pi} \iint_{S-\epsilon} \sigma_P \frac{\partial}{\partial n_A} \left(\frac{1}{\rho} \right) dS$$

ϵ est une surface arbitrairement petite et qui entoure le point A.

V_A est la contribution du point A à la vitesse en ce point. C'est la moitié du débit de la source placée en A.

$$V_A = +\frac{4\pi}{2} \frac{\sigma_A}{4\pi} = +\frac{\sigma_A}{2}$$

La dérivée du potentiel en A peut donc s'écrire :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_A = +\frac{\sigma_A}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma_P \frac{\partial}{\partial n_A} \left(\frac{1}{\rho} \right) dS$$

ou bien encore :

$$(3,1) \quad \sigma_A = + 2 \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_A + \frac{1}{2\pi} \iint_S \sigma_P \frac{\partial}{\partial n_A} \left(\frac{1}{\rho} \right) dS$$

Cette équation est de la forme :

$$f(x) = g(x) + \int K(x,y) f(y) dy$$

C'est une équation intégrale du type de Fréholm de deuxième espèce.

Sur la surface, la vitesse normale doit être nulle. La dérivée normale du potentiel de perturbation doit donc annuler la composante normale de la vitesse de l'écoulement uniforme. D'où :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_A - V_0 \cos \alpha_A = 0$$

α_A étant l'angle de la normale au point A avec la direction du courant incident.

L'équation (3,1) se met donc sous la forme :

$$(3,2) \quad \sigma_A = 2 V_0 \cos \alpha_A + \frac{1}{2\pi} \iint_S \sigma_P \frac{\partial}{\partial n_A} \left(\frac{1}{\rho} \right) dS$$

Il apparaît une difficulté, pour résoudre l'équation (3,2), lorsque P tend vers A, ρ devient nul. Landweber considère une intégrale auxiliaire :

$$- \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma_A \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{\rho} \right) dS$$

où $\vec{n}_P$ est la normale au point P. Cette intégrale représente le débit qui passe à travers la surface (S) dû à l'élément de source ($\sigma_A dS$). Mais seule la moitié du débit de l'élément de source passe à travers la surface (S), d'où la valeur de cette intégrale :

$$\frac{\sigma_A}{2}$$

On peut alors écrire :

$$\frac{\sigma_A}{2} = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \sigma_A \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{\rho} \right) dS$$

soit :

$$(3,3) \quad \sigma_A = \frac{-1}{2\pi} \iint_S \sigma_A \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{\rho} \right) dS$$

Ajoutons membre à membre (3,2) et (3,3), on obtient :

$$(3,4) \quad \sigma_A = V_0 \cos \alpha + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\sigma_P \frac{\partial}{\partial n_A} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \sigma_A \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] dS$$

Si P tend vers A, la quantité sous le signe somme s'annule. Il n'y a plus de singularité. Mais ceci n'est valable que dans le cas d'un corps fermé.

Considérons maintenant un corps de révolution dont le mouvement de translation est parallèle à son axe OZ. Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, la distance d'un point quelconque de la surface à l'axe. Découpons ce corps en N tranches limitées par des plans perpendiculaires à OZ et tels que les arcs interceptés sur la méridienne soient égaux.

$$(3,5) \quad \sigma_i = V_o \cos \alpha_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \int_{\Delta S_j} \left[\sigma_j \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \sigma_i \frac{\partial}{\partial n_j} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] dS_j$$

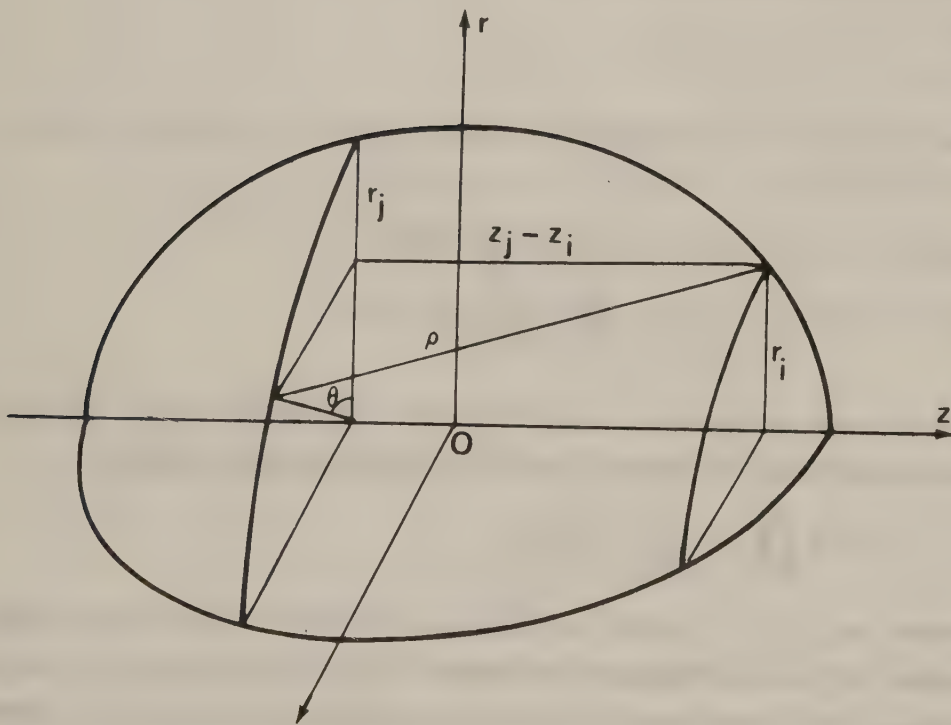


Fig. 2,3

$$\rho = AP = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + (z_i - z_j)^2 - 2 r_i r_j \cos \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{1}{\rho} \right) = (\text{grad } \frac{1}{\rho})_i \cdot \vec{n}_i$$

$$\frac{\partial}{\partial n_j} \left(\frac{1}{\rho} \right) = (\text{grad } \frac{1}{\rho})_j \cdot \vec{n}_j$$

$$(\vec{\text{grad}} \frac{1}{\rho})_i = \frac{-(r_i - r_j \cos \theta) \vec{\ell} + (z_j - z_i) \vec{k} + T \vec{\mu}}{[r_i^2 + r_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 r_i r_j \cos \theta]^{3/2}}$$

$$(\vec{\text{grad}} \frac{1}{\rho})_j = \frac{-(r_j - r_i \cos \theta) \vec{\ell} + (z_i - z_j) \vec{k} + T \vec{\mu}}{[r_i^2 + r_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 r_i r_j \cos \theta]^{3/2}}$$

$$\vec{n}_i = \sin \alpha_i \vec{\ell} + \cos \alpha_i \vec{k}$$

$$\vec{n}_j = \sin \alpha_j \vec{\ell} + \cos \alpha_j \vec{k}$$

$$dS_j = \Delta S r_j d\theta$$

Si ΔS est très petit

$$(3,5) \Rightarrow \sigma_i = V_o \cos \alpha_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_j [-(r_i - r_j \cos \theta) \sin \alpha_i + (z_j - z_i) \cos \alpha_i]}{[r_i^2 + r_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 r_i r_j \cos \theta]^{3/2}} dt$$

$$- \frac{\sigma_i [-(r_j - r_i \cos \theta) \sin \alpha_j + (z_i - z_j) \cos \alpha_j]}{[r_i^2 + r_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 r_i r_j \cos \theta]^{3/2}} \Delta S_z dt$$

Si $i = j$, le numérateur est nul

$$\text{et : } \int_0^{2\pi} () d\theta = 2 \int_0^{\pi} () d\theta$$

$$\sigma_i = V_o \cos \alpha_i - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Delta S \sigma_j \int_0^{\pi} \frac{[(r_i - r_j \cos \theta) \sin \alpha_i - (z_i - z_j) \cos \alpha_i] r_j d\theta}{[r_i^2 + r_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 r_i r_j \cos \theta]^{3/2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Delta S \sigma_i \int_0^{\pi} \frac{[(r_j - r_i \cos \theta) \sin \alpha_j - (z_i - z_j) \cos \alpha_j] r_i d\theta}{[r_i^2 + r_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 r_i r_j \cos \theta]^{3/2}}$$

ce qui s'écrit :

$$\sigma_i = V_o \cos \alpha_i - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Delta S \sigma_j X_{ij} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Delta S \sigma_i Y_{ij}$$

en posant :

$$(3,6) \quad X_{ij} = \int_0^\pi \frac{[(r_i - r_j \cos \theta) \sin \alpha_i - (z_j - z_i) \cos \alpha_i]}{[r_i^2 + r_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 r_i r_j \cos \theta]^{3/2}} r_j d\theta$$

$$(3,7) \quad Y_{ij} = \int_0^\pi \frac{[(r_j - r_i \cos \theta) \sin \alpha_j - (z_i - z_j) \cos \alpha_j]}{[r_i^2 + r_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 r_i r_j \cos \theta]^{3/2}} r_j d\theta$$

Soit encore :

$$\frac{\sigma_i}{V_o} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Delta S Y_{ij}\right) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\sigma_j}{V_o} \Delta S X_{ij} = \cos \alpha_i$$

ce qui nous conduit au système matriciel suivant :

$$(3,8) \quad [A_{ij}] \begin{bmatrix} \sigma_i \\ V_o \end{bmatrix} = \cos \alpha_i$$

avec :

si $i = j$

$$(3,9) \quad A_{jj} = A_{ii} = 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\Delta S Y_{ik}}{2\pi}$$

si $i \neq j$

$$(3,10) \quad A_{ij} = \frac{\Delta S X_{ij}}{2\pi}$$

La résolution du système linéaire (3,8) nous donne les intensités des sources réparties.

Remarquons que dans de nombreux cas le corps axisymétrique présente en plus un plan de symétrie perpendiculaire à son axe. Les singularités qui le représentent sont alors antisymétriques :

$$\sigma_i = -\sigma_{N-i+1}$$

En nous servant de cette propriété, nous pouvons, à peu près, doubler le nombre de singularités disposées sur le corps sans augmenter les temps de calcul ou dépasser la capacité de l'ordinateur. C'est ainsi qu'avec un calculateur de faible capacité, comme un IBM 1130, on peut disposer environ 70 singularités. Nous donnons en annexe le programme qui tient compte de cette propriété ainsi que la routine de résolution de systèmes matriciels que nous avons mis au point.

Le volume fictif est obtenu en recherchant le doublet équivalent du corps, c'est-à-dire le barycentre des sources et des puits.

Dans le cas de la sphère, on a contrôlé que la densité de source trouvée était correcte. En effet, la densité théorique de la répartition superficielle de source sur une sphère est $\sigma = V_0 \frac{3}{2} \cos \theta(1)$; la figure 3,4 montre qu'il y a parfaite coïncidence entre nos résultats et la théorie, même pour un nombre relativement faible de singularités ($N = 30$). On trouve également que le coefficient de volume ajouté de la sphère est 0,505. Ce qui représente une précision de un pour cent avec, encore, seulement trente singularités.

Pour parfaire le contrôle de cette méthode, nous avons calculé le volume ajouté d'ellipsoïdes de révolution. Ces coefficients sont connus de manière théorique ; ils ont pour expressions :

$$C_A = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{a}{c} - \frac{b^2}{2c^2} \operatorname{Log} \frac{a+c}{a-c}} - 1 \quad \text{pour un ellipsoïde allongé}$$

$$C_A = \frac{\frac{c^3}{a^2b}}{\operatorname{Arc} \sin \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2}} - 1 \quad \text{pour un ellipsoïde aplati}$$

Les calculs sont faits avec 60 singularités et l'aide du programme qui tient compte de la symétrie supplémentaire des ellipsoïdes. Il faut environ douze minutes de calcul par cas sur le calculateur IBM 1130.

(1) voir annexe 6.

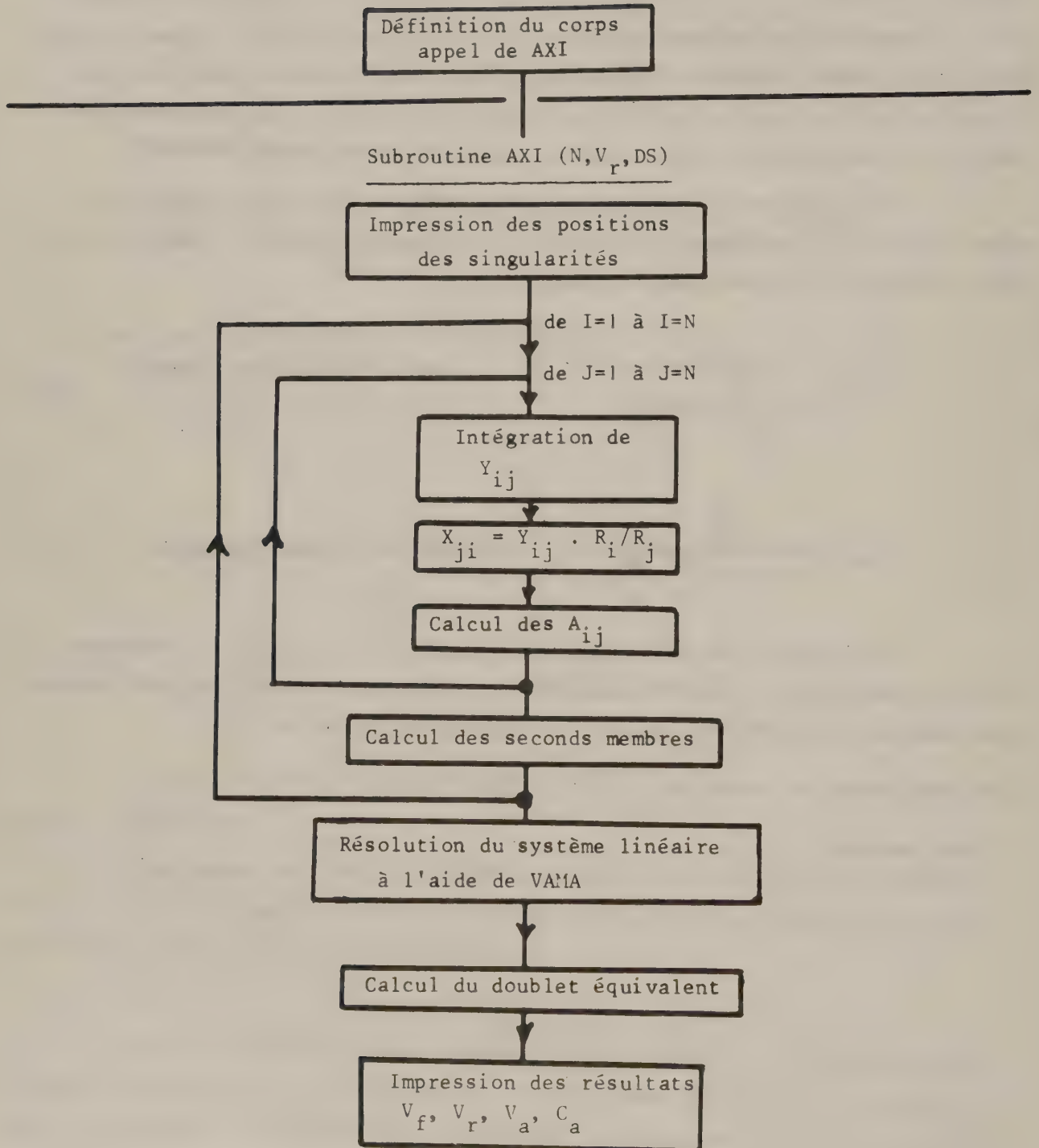


Fig. 3,4

SUBROUTINE AXI(N,VR,DS)

DETERMINATION DU VOLUME AJOUTE ET DU COEFFICIENT DE MASSE AJOUTEE
D'UN CORPS AXISYMETRIQUE

Z(I) ABSCISSE DE L'ANNEAU I

RAYON DE L'ANNEAU I

AL(I) ANGLE DE LA NORMALE A LA MERIDIENNE ET DE L'AXE

SUBROUTINE AXI(N,VR,DS)

EXTERNAL AFY

DIMENSION A(30,30),B(30)

COMMON Z(30),R(30),AL(30),RI,RJ,ZI,ZJ,CJ,SJ,U

1 FORMAT('1'///30X,'POSITION DES SINGULARITES'//10X,'I',
113X,'Z(I)',13X,'R(I)',13X,'ALPHA(I)'///)

2 FORMAT(9X,I3,5X,E16.6,5X,E15.6,5X,E15.6/)

3 FORMAT(3X,10E11.2)

4 FORMAT(/)

5 FORMAT(/10X,'DENSITE DE SOURCES'///)

6 FORMAT(10X,'B(',I2,')=' ,E13.6/)

7 FORMAT('1')

8 FORMAT(///10X,'VOLUME REEL',E16.6///10X,'VOLUME FICTIF',E16.6

1///10X,'VOLUME AJOUTE',E16.6////////10X,'COEFFICIENT DE VOLUME

2AJOUTE',E13.3)

PI=3.141592

XL=0.

LE CORPS ET LA POSITION DES SINGULARITES SONT DEFINIS PAR LE
PROGRAMME D'APPEL

WRITE(3,1)

WRITE(3,2)(I,Z(I),R(I),AL(I),I=1,N)

WRITE(3,7)

DETERMINATION DES INTENSITES DES ANNEAUX DE SOURCE

DO 20 I=1,N

RI=R(I)

ZI=Z(I)

A(I,1)=1.

DO 200 K=1,N

CJ=COS(AL(K))

SJ=SIN(AL(K))

RJ=R(K)

ZJ=Z(K)

CALL QG10(XL,PI,AFY,YIK)

YIK=YIK*DS/(2.*PI)

IF(I-K)210,200,210

210 A(K,I)=YIK*RI/RJ

```
A(I,I)=A(I,I)-YIK
200 CONTINUE
B(I)=COS(AL(I))
20 CONTINUE
DO 30 I=1,N
WRITE(3,3)(A(I,J),J=1,N)
30 WRITE(3,4)
WRITE(3,7)
CALL VAMA(A,B,N)
DO 40 I=1,N
WRITE(3,3)(A(I,J),J=1,N)
40 WRITE(3,4)
WRITE(3,7)
WRITE(3,5)
WRITE(3,6)(I,B(I),I=1,N)
WRITE(3,7)
```

CALCUL DU VOLUME AJOUTE

```
VF=0.
DO 50 I=1,N
VF=VF+(2.*PI*DS*B(I)*R(I)*Z(I))
50 CONTINUE
VA=VF-VR
CA=VA/VR
WRITE(3,8)VR,VF,VA,CA
RETURN
END
```

FUNCTION AFY(T)

CONTRIBUTION ELEMENTAIRE DE LA SOURCE I AU POTENTIEL AU POINT J

```
COMMON Z(30),R(30),AL(30),RI,RJ,ZI,ZJ,CJ,SJ,U
AFY=((((RJ-RI*COS(T))*SJ)+(ZJ-ZI)*CJ)*RJ)/((RI*RI+RJ*RJ+
2(ZJ-ZI)*(ZJ-ZI)-2.*RI*RJ*COS(T))**.5)
RETURN
END
```

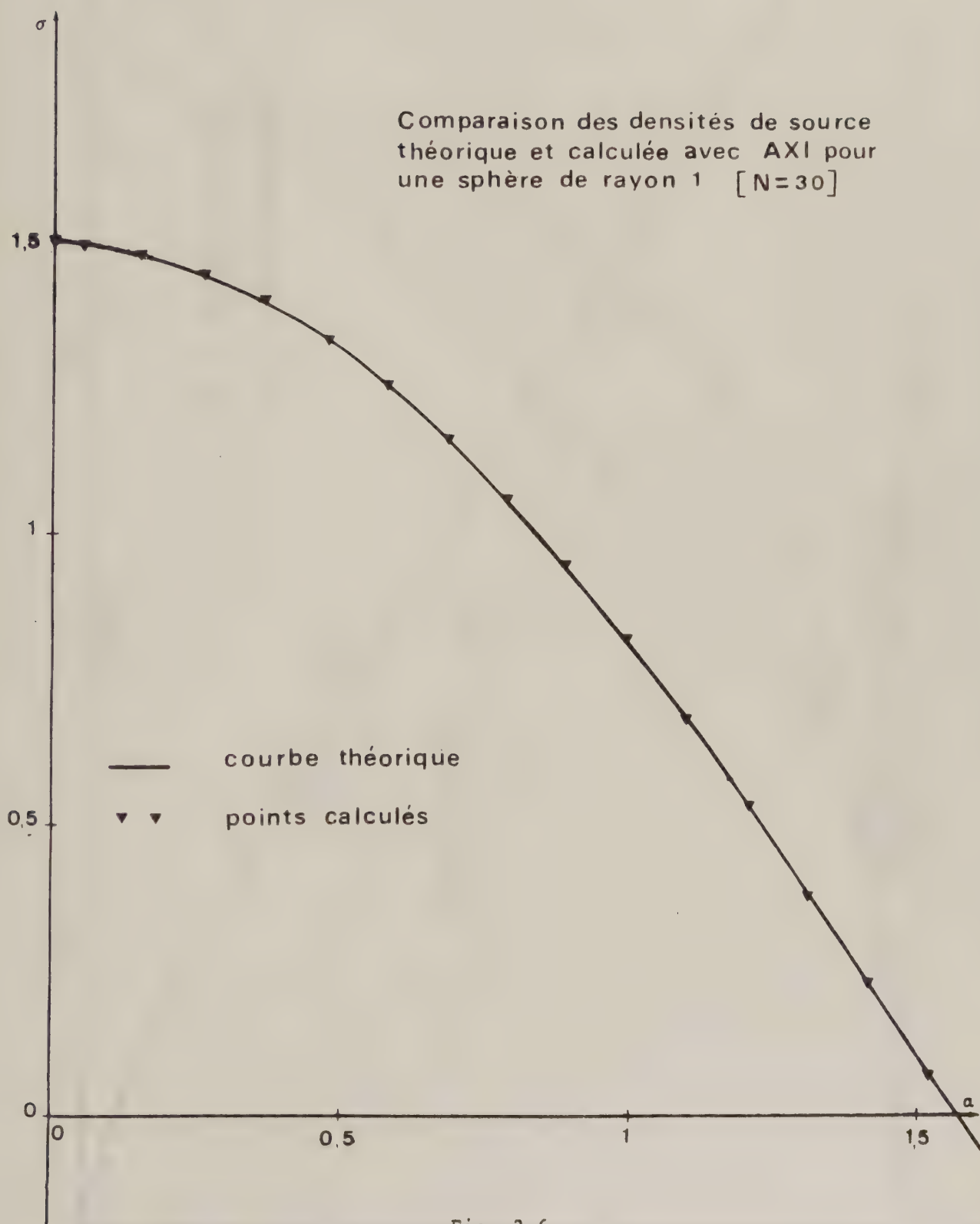


Fig. 3,6

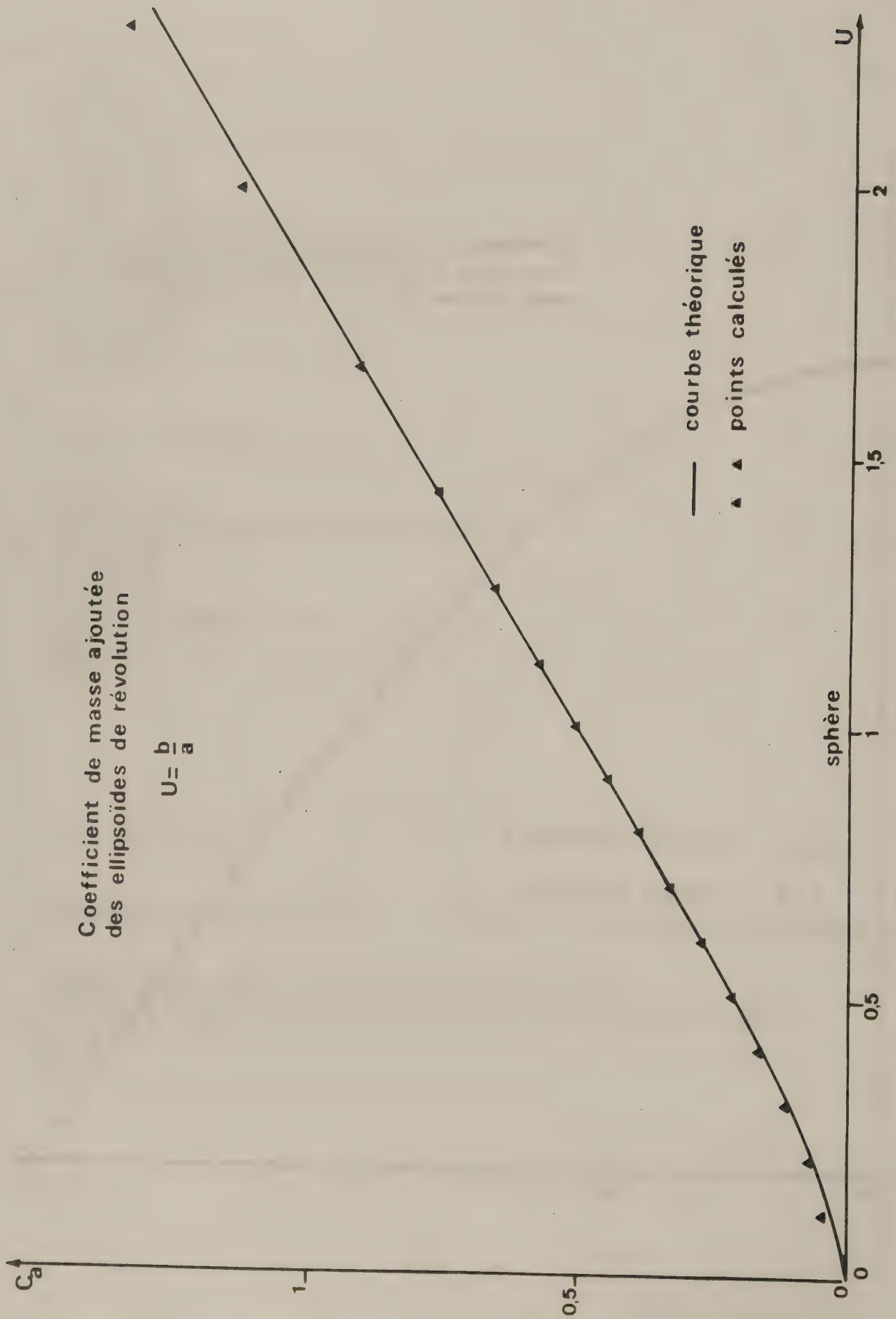


Fig. 3,7

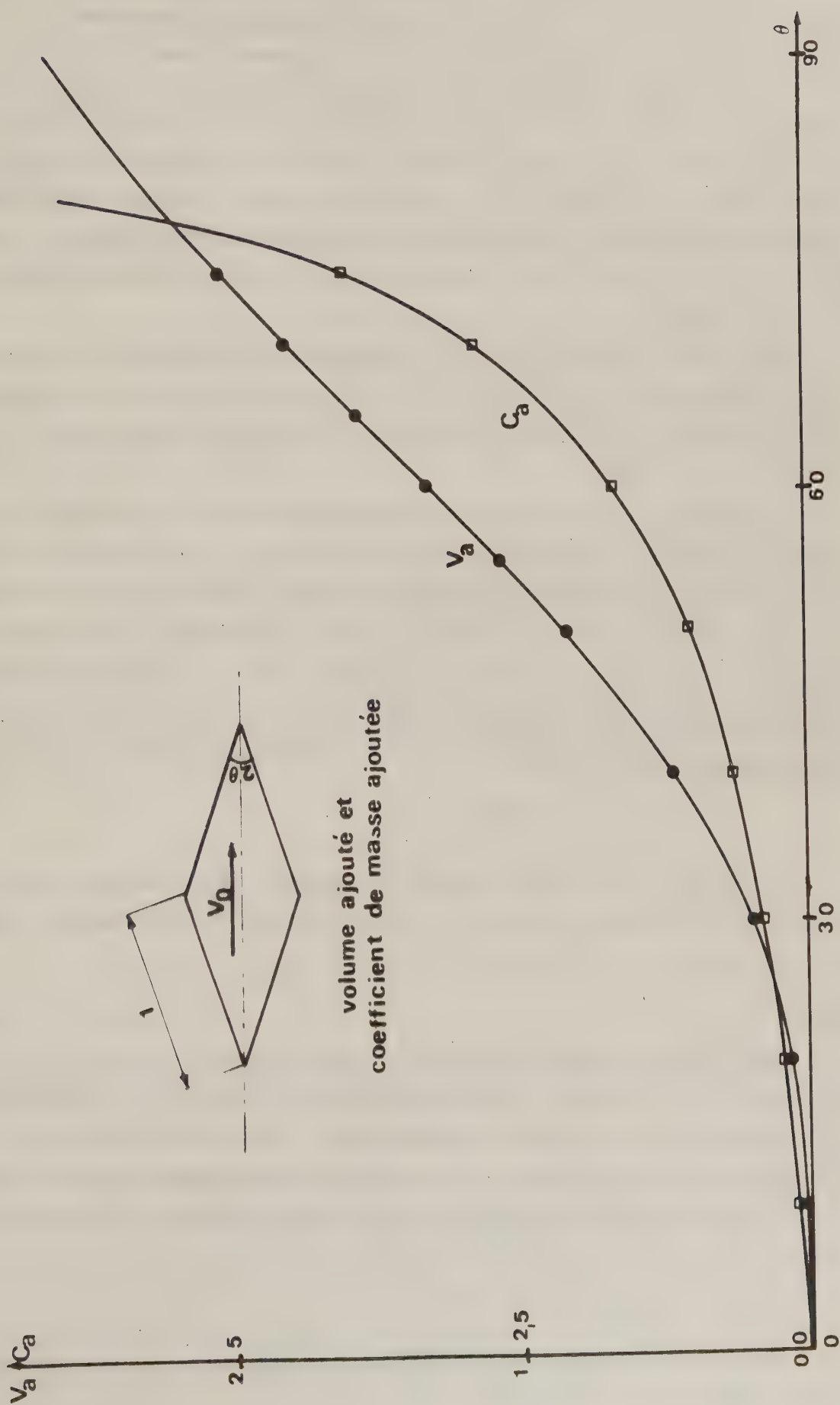


Fig. 3,8

La courbe 3,7 montre la validité de notre programme pour les corps allongés. En effet, si pour les très forts allongements le programme perd de sa précision, la masse ajoutée devient alors négligeable. Pour les corps aplatis, le programme reste valable dans la mesure où la pente de la tangente ne conserve pas une valeur grande dans une région très étendue autour du point d'arrêt. S'il n'en est pas ainsi, on peut assimiler les extrémités du corps à des disques plans, de diamètre fini, normaux au courant incident. Mais le mode de représentation que nous avons adopté ne convient plus ; il faudrait, pour traiter ce cas, faire une étude analogue avec des distributions de doublets normaux à la surface.

Nous avons également testé ce programme sur un ordinateur IBM 360-30. Avec cent singularités, ce qui n'est pas le maximum de capacité de la machine, on obtient, au bout de dix minutes de calcul, 0,5001 pour le coefficient de volume ajouté de la sphère.

La figure 3,8 illustre un exemple d'application de ce programme. On y a tracé les courbes de variation du volume ajouté d'un corps formé par deux cônes de révolution identiques accolés par leur base. Compte tenu des remarques précédentes, on peut tracer ces courbes à l'aide du programme AXISY jusqu'à une valeur de θ voisine de 75 degrés. La limite, lorsque θ tend vers zéro, de la formule qui donne le coefficient de volume ajouté des ellipsoïdes de révolution aplatis nous fournit la valeur du volume ajouté d'un disque plan de rayon r se déplaçant suivant son axe.

$$V_a = \frac{8}{3} r^3$$

C'est aussi le cas limite de notre exemple ; nous achevons donc le tracé de notre courbe par continuité et en nous servant de cette valeur limite.

REMARQUE 1

Dans tous nos exemples nous avons contrôlé que la condition de fermeture du corps était satisfaite. Mais, pour traiter le cas des corps axisymétriques ne présentant pas de symétrie supplémentaire, nous pouvons améliorer la précision des calculs en ajoutant, à la condition de glissement que nous avons déjà traduite par le système (3,8), cette condition de fermeture. C'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i 2 \pi r_i \Delta S = 0$$

Nous pouvons ajouter cette équation à toutes celles du système (3,8), qui s'écrit alors :

$$\frac{\sigma_i}{V_0} \left(1 + \frac{\Delta S}{2\pi} r_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Delta S Y_{ij} \right) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\sigma_j}{V_0} (X_{ij} + r_j) \Delta S = \cos \alpha_j$$

pour i variant 1 à N . D'où le programme AXIF donné en annexe.

REMARQUE 2

Les intégrales qui interviennent dans les calculs précédents sont toutes de la forme :

$$J = \int_0^\pi \frac{[(r_i - r_j \cos \theta) \sin \alpha_i - (z_j - z_i) \cos \alpha_i]}{[r_i^2 + r_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 r_i r_j \cos \theta]^{3/2}} r_j d\theta$$

Ce sont des intégrales elliptiques ; nous allons les exprimer en fonction des intégrales complètes E et K .

Posons $\theta = \pi - 2\phi$, il vient :

$$J = \int_0^{\pi/2} 2 \times \frac{[r_i - r_j (2 \sin^2 \phi - 1)] \sin \alpha_i - (z_j - z_i) \cos \alpha_i}{[(r_i + r_j)^2 + (z_j - z_i)^2 - 4 r_i r_j \sin^2 \phi]^{3/2}} \times r_j d\phi$$

ce qui s'écrit :

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{2 r_j}{[(r_i + r_j)^2 + (z_j - z_i)^2]^{3/2}} \times \frac{(r_i + r_j) \sin \alpha_i - (z_j - z_i) \cos \alpha_i - 2 r_j \sin \alpha_i \sin^2 \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi$$

$$k^2 = \frac{(r_i + r_j)^2 - (r_i - r_j)^2}{(r_i + r_j)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

k^2 est donc toujours positif et inférieur à 1, ce qui permet d'écrire J sous la forme suivante :

$$J = \frac{1}{2} \frac{k^2}{r_i} \int_0^{\pi/2} \frac{(r_i + r_j) \sin \alpha_i - (z_j - z_i) \cos \alpha_i - 2 r_j \sin \alpha_i \sin^2 \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi$$

Considérons l'intégrale :

$$\Delta J = - \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{-k^2 \sin^2 \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi$$

$$\Delta J = - \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - k^2 \sin^2 \phi) - 1}{(1 - k^2 \sin^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi$$

soit :
$$\Delta J = -\frac{1}{k^2} K(k) + \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1-k^2 \sin^2 \phi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$$

On a donc :

$$J = \frac{r_j}{r_i} \sin \alpha_i K(k) + \frac{k^2}{2r_i} \left\{ (r_i + r_j) \sin \alpha_i - (z_j - z_i) \cos \alpha_i - \frac{2r_j \sin \alpha_i}{k^2} \right\} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1-k^2 \sin^2 \phi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$$

soit :

$$J = \left\{ \frac{r_j}{r_i} K(k) + \frac{k^2}{k'^2} \times \frac{r_i - r_j}{2r_i} E(k) - \frac{r_j}{r_i} E(k) \right\} \sin \alpha_i - \left\{ \frac{k^2}{k'^2} \times \frac{z_j - z_i}{2r_i} E(k) \right\} \cos \alpha_i$$

On a donc :

$$J = \left[\frac{r_j}{r_i} (K - E) + \frac{k^2}{k'^2} \left(\frac{r_i - r_j}{2r_i} \right) E \right] \sin \alpha_i + \left[\frac{k^2}{k'^2} \left(\frac{z_i - z_j}{2r_i} \right) E \right] \cos \alpha_i$$

ou :

$$J = k^2 \left\{ \left[\frac{r_j}{r_i} D + \frac{1}{k'^2} \left(\frac{r_i - r_j}{2r_i} \right) E \right] \sin \alpha_i + \frac{1}{k'^2} \left(\frac{z_i - z_j}{2r_i} \right) E \cos \alpha_i \right\}$$

(3,11)

avec :

$$(3,12) \quad k^2 = 4 \frac{r_j}{r_i} \frac{1}{\left(1 + \frac{r_j}{r_i}\right)^2 + \left(\frac{z_j - z_i}{r_i}\right)^2}$$

On pourrait récrire nos programmes en utilisant ces formules. Cela reviendrait à substituer au sous-programme d'intégration, à l'aide de quadratures de GAUSS, un sous-programme de calcul des intégrales elliptiques complètes. Mais la principale cause d'erreur étant plus liée au mode de représentation du corps et à la résolution d'un système linéaire important qu'au calcul de ces intégrales, on n'améliorerait pas de manière sensible le résultat final, qui, en tout état de cause, est déjà satisfaisant.

Chapitre 4

ETUDE D'UN CORPS QUELCONQUE EN MILIEU INFINI

Nous nous proposons maintenant d'établir un programme analogue au précédent - quant à sa mise en oeuvre et aux résultats obtenus - mais qui nous permet d'étudier un corps quelconque, à trois dimensions, en mouvement de translation dans un fluide illimité. Remarquons, toutefois, que notre programme AXI conserve tout son intérêt, car, dans le cas de corps axisymétriques, il est beaucoup plus rapide.

Nous allons encore simuler le corps étudié par une répartition discontinue de sources, c'est-à-dire que nous allons approcher la surface du corps par un certain nombre de facettes au centre desquelles nous placerons une source. Cette méthode est couramment employée par de nombreux auteurs. Ceci conduit encore à un système linéaire d'ordre élevé puisque pour représenter correctement le corps, il faut disposer le maximum possible de facettes. Les programmes de résolution de tels systèmes ne sont plus efficaces. C'est pourquoi nous avons pensé à une méthode de relaxation.

L'étude faite au chapitre précédent reste valable jusqu'à la formule (3,4) :

$$\sigma_A = \vec{V}_O \cdot \vec{n} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\sigma_P \frac{\partial}{\partial n_A} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \sigma_A \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] dS$$

Nous nous plaçons dans un système d'axes orthonormés quelconque. Chaque facette est définie, dans ce repère, par les trois coordonnées de son centre, son aire et les trois composantes de sa normale dirigée vers l'extérieur du corps étudié.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } \vec{n}_i &= \cos \alpha_i \vec{i} + \cos \beta_i \vec{j} + \cos \gamma_i \vec{k} \\ \rho^2 &= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à :

$$-\frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{(x_i - x_j) \cos \alpha_i + (y_i - y_j) \cos \beta_i + (z_i - z_j) \cos \gamma_i}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{3/2}}$$

De même :

$$-\frac{\partial}{\partial n_j} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{(x_j - x_i) \cos \alpha_j + (y_j - y_i) \cos \beta_j + (z_j - z_i) \cos \gamma_j}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{3/2}}$$

La formule (3,4) peut se mettre sous la forme :

$$\sigma_i = \vec{V}_o \cdot \vec{n}_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n (S_j \sigma_j \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{1}{\rho} \right) - S_i \sigma_i \frac{\partial}{\partial n_j} \left(\frac{1}{\rho} \right))$$

$$\begin{aligned} & \vec{V}_o \cdot \vec{n}_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \sigma_j \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{1}{\rho} \right) S_j \\ &= \frac{\sum_{j \neq i}^n \sigma_j \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{1}{\rho} \right) S_j}{1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial n_j} \left(\frac{1}{\rho} \right) S_j} \end{aligned}$$

soit encore :

$$(4,1) \quad \sigma_i = \frac{u \cos \alpha_i + v_o \cos \beta_i + w_o \cos \gamma_i - \sum_{j=1}^n A_{ij} \sigma_j}{B_i}$$

avec :

$$(4,2) \quad A_{ij} = S_j \frac{(x_i - x_j) \cos \alpha_i + (y_i - y_j) \cos \beta_i + (z_i - z_j) \cos \gamma_i}{((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2)^{3/2}} \times \frac{1}{4\pi}$$

et :

$$(4,3) \quad B_i = 1 - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n S_j \frac{(x_j - x_i) \cos \alpha_j + (y_j - y_i) \cos \beta_j + (z_j - z_i) \cos \gamma_j}{((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2)^{3/2}}$$

La formule (4,1) se prête parfaitement à une résolution par approximations successives. On calcule la nouvelle valeur de σ_i à partir des valeurs connues des autres singularités. Pour initialiser le système, on suppose que chaque source contribue seule à annuler la vitesse normale au point où elle est située. On a donc :

$$(\sigma_i)_o = \frac{u_o \cos \alpha_i + v_o \cos \beta_i + w_o \cos \gamma_i}{B_i}$$

et à la $m^{i\text{ème}}$ itération :

$$(\sigma_i)_m = (\sigma_i)_o - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} (\sigma_j)_m + \sum_{j=i+1}^n A_{ij} (\sigma_j)_{m-1}}{B_i}$$

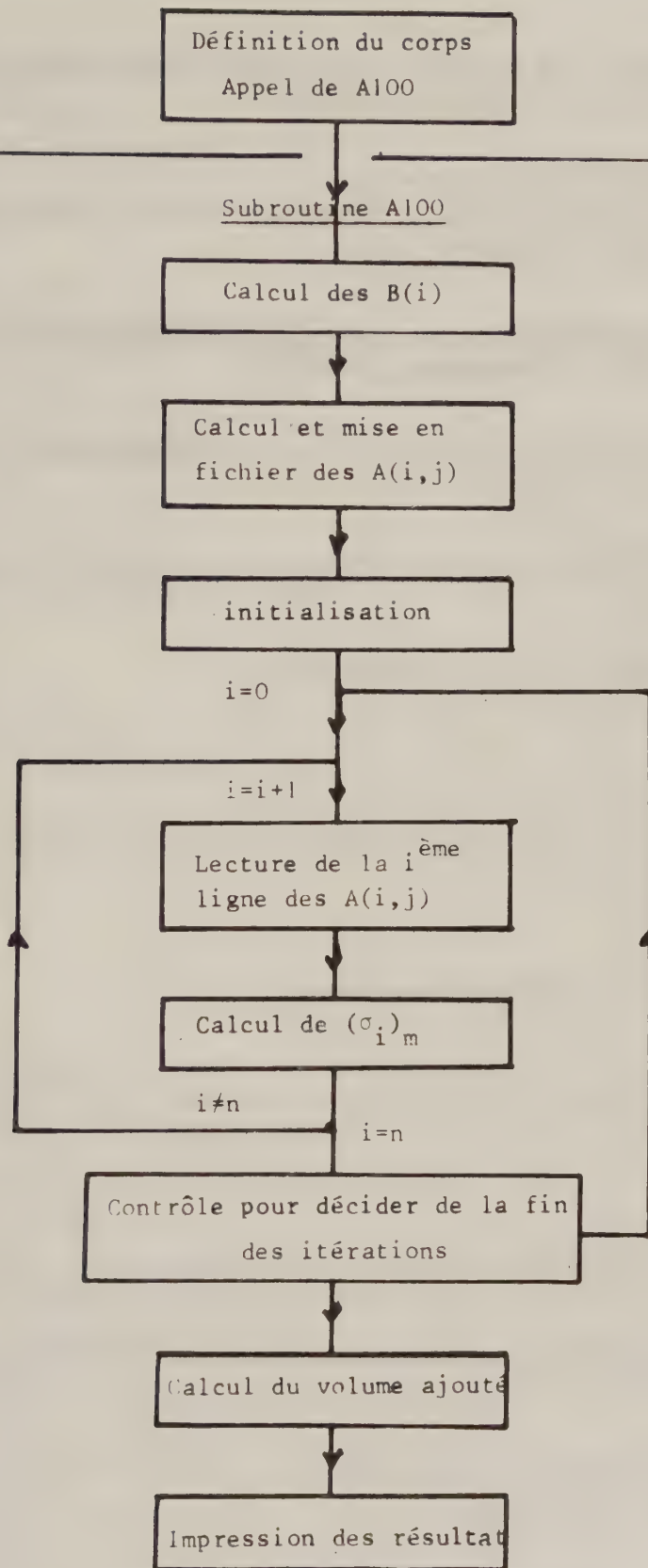


Fig. 4,1

CALCUL DU DOUBLET EQUIVALENT D'UN CORPS QUELCONQUE AYANT UN
MOUVEMENT DE TRANSLATION QUELCONQUE

SUBROUTINE A100(MM,VR)
DIMENSION B(500),S(500),VECT(500)
COMMON X(500),Y(500),Z(500),CX(500),CY(500),CZ(500),SU(500)
DEFINE FILE 7(500,500,U,K)

LE CORPS,LES FACETTES,LES POSITIONS DES SINGULARITES ET LES AIRES
SONT DEFINIS PAR LE PROGRAMME D'APPEL

5 FORMAT('1')
6 FORMAT(10X,'VOLUME REEL=',E13.6///10X,'COMPOSANTES DU DOUBLET
1EQUIVALENT'///10X,3E13.6)
7 FORMAT(////)
8 FORMAT(1X,10E11.3)
9 FORMAT(1X,I4,1X,E13.6,1X,E13.6,1X,E13.6,1X,E13.6,1X,E13.6,1X
1,E13.6,1X,E13.6/)

DIRECTION DU MOUVEMENT DE TRANSLATION

VX=1.
VY=0.
VZ=0.
WRITE(3,5)
PI=3.1415926535
K=1

CALCUL DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE

DO 10 I=1,500
VECT(I)=0.
10 CONTINUE
DO 20 I=1,MM
B(I)=1.
DO 21 J=1,MM
IF(I-J)211,21,211
211 B(I)=B(I)-(SU(J)/(4.*PI))*((X(J)-X(I))*CX(J)+(Y(J)-Y(I))*CY(J)+
1(Z(J)-Z(I))*CZ(J))/((X(I)-X(J))**2+(Y(I)-Y(J))**2+(Z(I)-Z(J))**2)
2**1.5
VECT(J)=(SU(J)/(4*PI))*((X(I)-X(J))*CX(I)+(Y(I)-Y(J))*CY(I)
1+(Z(I)-Z(J))*CZ(I))/((X(I)-X(J))**2+(Y(I)-Y(J))**2+(Z(I)-Z(J))**2)
2**1.5
21 CONTINUE
S(I)=(VX*CX(I)+VY*CY(I)+VZ*CZ(I))*2
WRITE(7,K)(VECT(J),J=1,500)

RESOLUTION PAR ITERATIONS SUCCESSIVES

20 CONTINUE
KP=0

```

51 KK=1
   KP=KP+1
   ICON=KP/5
   ICON=KP-5*ICON
   IF(ICON=1)421,42,421
42  WRITE(3,8)(S(I),I=1,MM)
   WRITE(3,7)
421 CONTINUE
   K=1
   DO 40 I=1,MM
   SN=VX*CX(I)+VY*CY(I)+VZ*CZ(I)
   READ(7,K)(VECT(J),J=1,500)
   DO 41 J=1,MM
   IF(I=J)411,41,411
411 SN=SN-S(J)*VECT(J)
41  CONTINUE
   SN=SN/B(I)
   CONT=ABS(SN-S(I))
   S(I)=SN
   IF(CONT=1.E-3)401,401,402
401 KK=KK*1
   GO TO 40
402 KK=KK*0
40  CONTINUE
   IF(KK)50,51,50

```

CALCUL DES COMPOSANTES DU DOUBLET EQUIVALENT

```

50 XS=0.
   YS=0.
   ZS=0.
   XP=0.
   YP=0.
   ZP=0.
   DO 70 I=1,MM
   WRITE(3,9)I,X(I),Y(I),Z(I),CX(I),CY(I),CZ(I),S(I)
   IF(S(I))701,701,702
701 XP=XP+S(I)*X(I)*SU(I)
   YP=YP+Y(I)*S(I)*SU(I)
   ZP=ZP+Z(I)*S(I)*SU(I)
   GO TO 70
702 XS=XS+X(I)*S(I)*SU(I)
   YS=YS+Y(I)*S(I)*SU(I)
   ZS=ZS+Z(I)*S(I)*SU(I)
70  CONTINUE
   WRITE(3,7)
   WRITE(3,8)XS,YS,ZS
   WRITE(3,8)XP,YP,ZP
   WRITE(3,7)
   VFX=XS+XP
   VFY=YS+YP
   VFZ=ZS+ZP
   WRITE(3,6)VR,VFX,VFY,VFZ
1000 RETURN
END

```

Nous vérifions notre programme en traitant le cas des ellipsoïdes de révolution allongés. La décomposition de la surface solide en facettes est faite en deux étapes. Tout d'abord, on découpe le corps en tranches limitées par des plans perpendiculaires à l'axe et qui passent par les points M_1 de la méridienne. Les M_1 sont obtenus en faisant varier linéairement le coefficient α qui intervient dans les équations paramétriques de l'ellipse ($x = a \cos \alpha$; $y = b \sin \alpha$). Chacun de ces anneaux est ensuite décomposé en facettes à l'aide de plans passant par l'axe de révolution et faisant entre eux un angle constant. La courbe 4,2 montre la valeur de la méthode. Elle est tracée pour un découpage de 20 anneaux de 14 facettes. Nous contrôlons pour chaque cas que toutes les symétries et la condition de fermeture, que nous n'avons pas imposées, sont bien vérifiées. De plus, dans le cas de la sphère, on retrouve au millième près la densité théorique de source.

CAS D'UN CUBE

Considérons un cube en mouvement de translation quelconque. Du fait des symétries, la matrice de définition de son doublet équivalent est diagonale lorsqu'elle est exprimée dans un repère d'axes parallèles à ses arêtes.

L'application de notre méthode de calcul à un cube unitaire, décomposée en 294 facettes, nous donne :

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} 1,68 & 0 & 0 \\ 0 & 1,68 & 0 \\ 0 & 0 & 1,68 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}$$

ce qui nous conduit à un coefficient de masse ajoutée dans une direction perpendiculaire à une face :

$$C_a = 0,68$$

Si nous considérons un mouvement de translation parallèle à une diagonale et défini par :

$$u_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} T(t) \quad ; \quad v_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} T(t) \quad ; \quad w_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} T(t) \quad \begin{array}{l} T \text{ ne dépend que} \\ \text{du temps} \end{array}$$

on obtient, à partir de la matrice précédente, l'expression du doublet équivalent pour ce mouvement :

$$\vec{\mu} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) 1,68 \times \frac{\sqrt{3}}{3} T(t)$$

On retrouve exactement le même résultat en appliquant directement notre programme dans le cas correspondant à cette nouvelle orientation du cube.

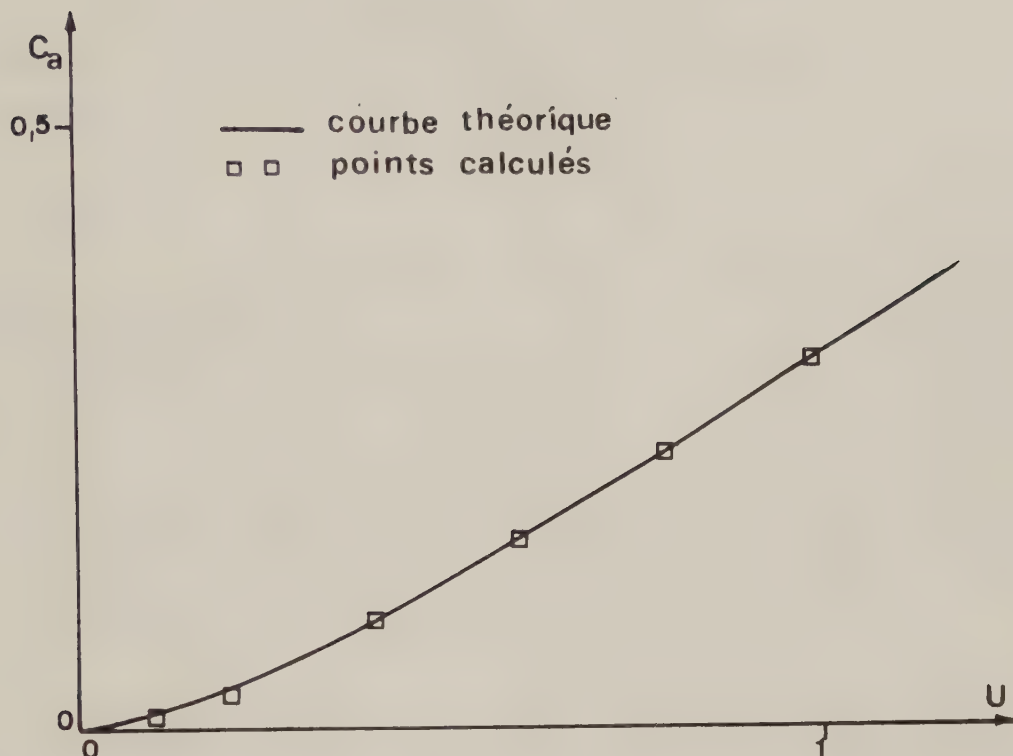


Fig. 4,2

Pour résoudre ces systèmes de 280 inconnues, il faut une heure et dix minutes de calcul, soit trente cinq minutes pour le calcul des 7840 coefficients et environ six minutes pour chacune des six itérations.

Sous cette forme, ce programme nécessite l'usage de l'ordinateur IBM 360-30 avec un disque Système chargé en F-FORTRAN. On pourrait alors résoudre sans aucune modification des systèmes de 900 équations à 900 inconnues. La durée de résolution serait, en supposant que le nombre d'itérations reste sensiblement le même, d'environ sept heures.

Remarquons, enfin, que la rapidité de la convergence dépend beaucoup du choix de l'ordre de calcul des sources. Cela est particulièrement sensible dans le cas du cube.

Chapitre 5

ETUDE EXPERIMENTALE DE LA MASSE AJOUTEE

DISPOSITIF EXPERIMENTAL -

Ce dispositif nous a été suggéré par un article de E. STELSON et J. ASCE.

Soit une poutre encastrée à ses deux extrémités et excitée en son milieu par un système électromagnétique, figure 4,1. La fréquence de résonance d'une telle poutre est fonction de ses paramètres géométriques, de sa compression et de sa masse, ainsi que de l'amortissement.

Considérons, maintenant, un corps suspendu et fixé de manière rigide à cette poutre. Nous obtenons dans l'air une certaine fréquence de résonance f_0 . Puis, si nous immergeons le corps suspendu, nous observons une nouvelle fréquence de résonance f_1 .

Remarquons que l'étude des vibrations d'un tel dispositif montre que la poussée hydrostatique ne modifie pas cette fréquence de résonance. Nous vérifierons par la suite que l'amortissement a des effets négligeables. Le glissement de la résonance montre donc que, comme le prévoit la théorie, "tout se passe comme si" le corps entraînait dans son mouvement une masse fluide.

Si, au préalable, nous avons tracé la courbe des fréquences de résonance en fonction de la masse suspendue, il nous est aisé de déduire de f_1 la masse ajoutée du corps immergée.

METHODE EXPERIMENTALE -

Nous traçons la courbe de variation de la fréquence de résonance de la poutre en suspendant différents poids marqués. Puis, nous vérifions la précision de la méthode en "pesant" dans l'air et à l'aide de ce système différent corps ; on compare les résultats obtenus à ceux d'une balance ordinaire.

SCHEMA DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL
ET DE LA CHAINE DE MESURE

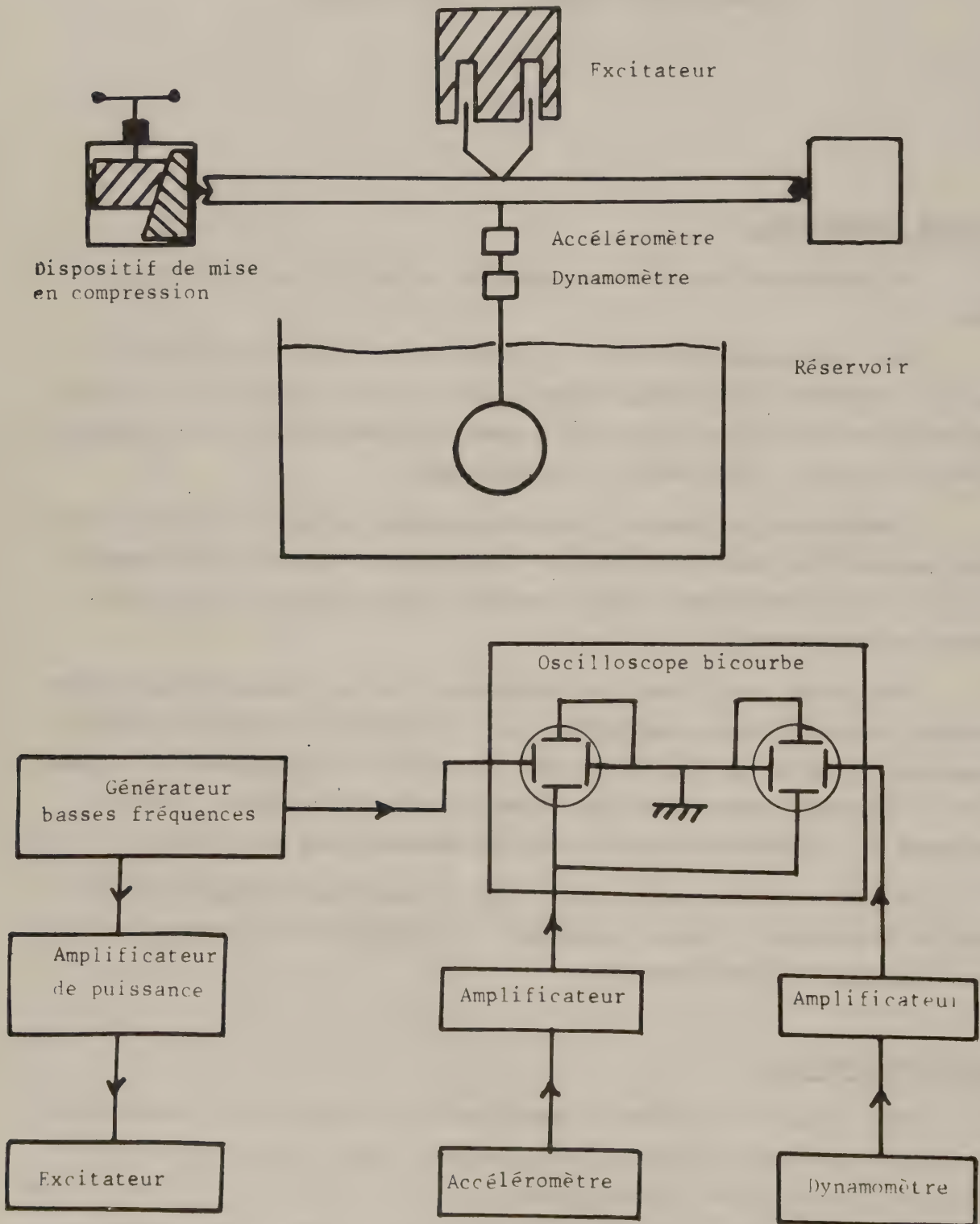


Fig. 5,1

A la suite de ces premières expériences, nous pouvons affirmer que, dans tous les cas, l'erreur relative est inférieure à 5 %. Les erreurs sont dues essentiellement à la mesure des fréquences.

ETUDE EXPERIMENTALE DE LA SPHERE -

Nous opérons avec une sphère de diamètre $d = 14$ cm. On trouve, lorsqu'elle est dans l'air, $f_0 = 19,6$ Hz, et, lorsqu'elle est complètement immergée dans de l'eau, $f_1 = 18,5$ Hz. La courbe d'étalonnage 5,2 nous montre que la masse fictive est de 4,70 kg. La masse réelle du corps est 3,96 kg. Nous obtenons donc une masse ajoutée de 0,74 kg. Le volume réel de la sphère étant 1,43 litre, on trouve que le coefficient de masse ajoutée est 0,517. Compte tenu de la précision de la méthode, on retrouve bien le coefficient théorique en milieu infini : 0,5. Nous avons obtenu le même résultat avec d'autres sphères de diamètre différent.

Nous avons procédé à différents contrôles de la validité de nos expériences.

Etude de l'influence de parois

Nous opérons dans un réservoir limité. Pour déceler une éventuelle influence des parois solides, nous avons disposé la sphère à l'intérieur de différents tubes de diamètres décroissants. La figure 5,3 donne les résultats de ces mesures.

Nous avons également contrôlé que la présence du fond et d'une surface libre n'intervenait pas tant que la plus courte distance de ces limites, à un point quelconque de la sphère, n'était jamais inférieure à une fois le diamètre.

Etude de l'amortissement

La présence d'un amortissement modifie la fréquence de résonance, mais aussi introduit un déphasage entre l'accélération du corps et la force qui la provoque. Nous avons vérifié indirectement que le glissement de fréquence, dû à l'amortissement, est négligeable en contrôlant que le déphasage est nul.

Pour cela, nous avons introduit dans la tige qui relie la poutre et la sphère un accéléromètre et un dynamomètre. Ceci nous permet d'attaquer les plaques de déviation verticale d'un oscilloscope bicourbe, branché en "Lissajous", avec un signal proportionnel à l'accélération de la sphère.

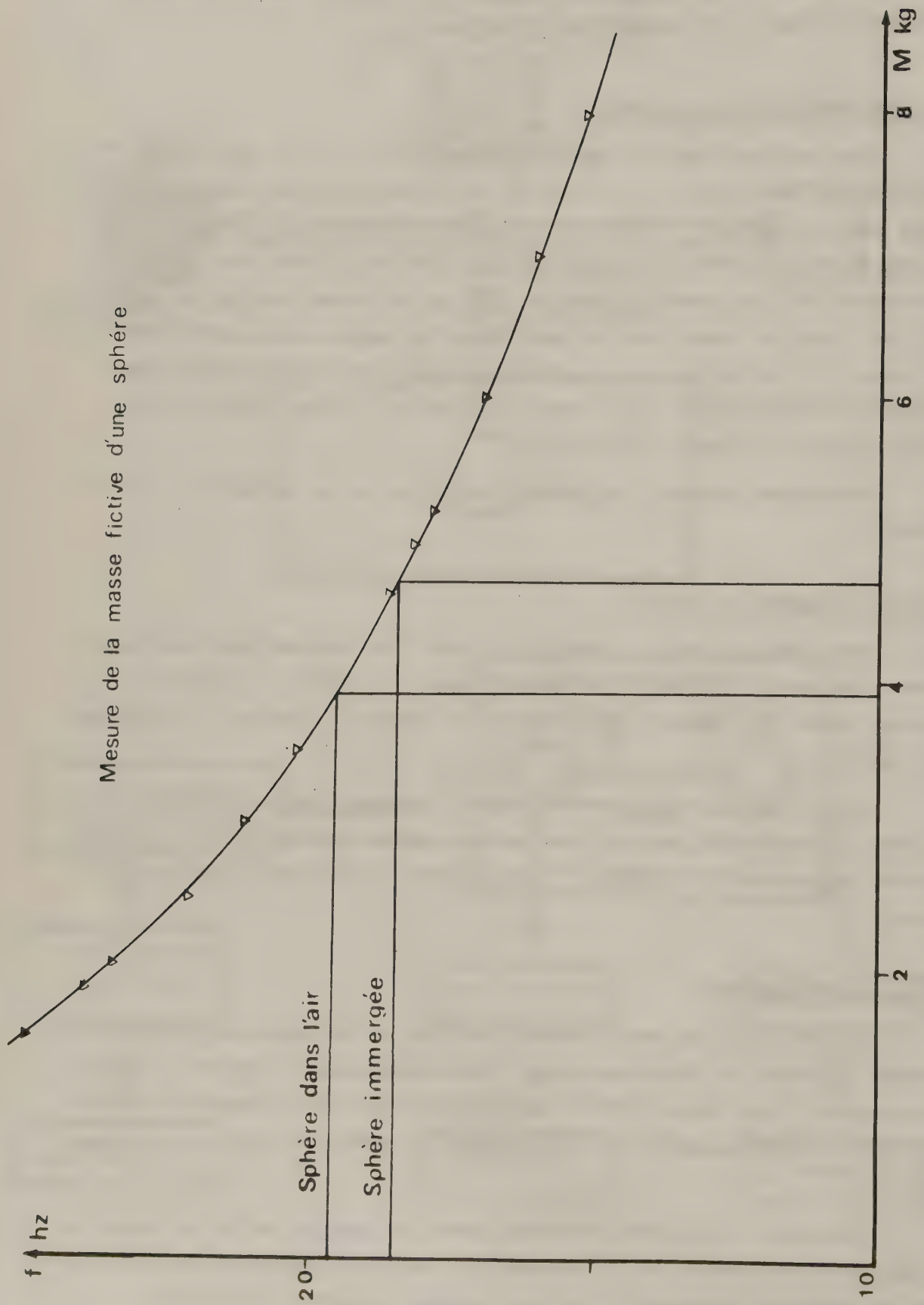


Fig. 5,2

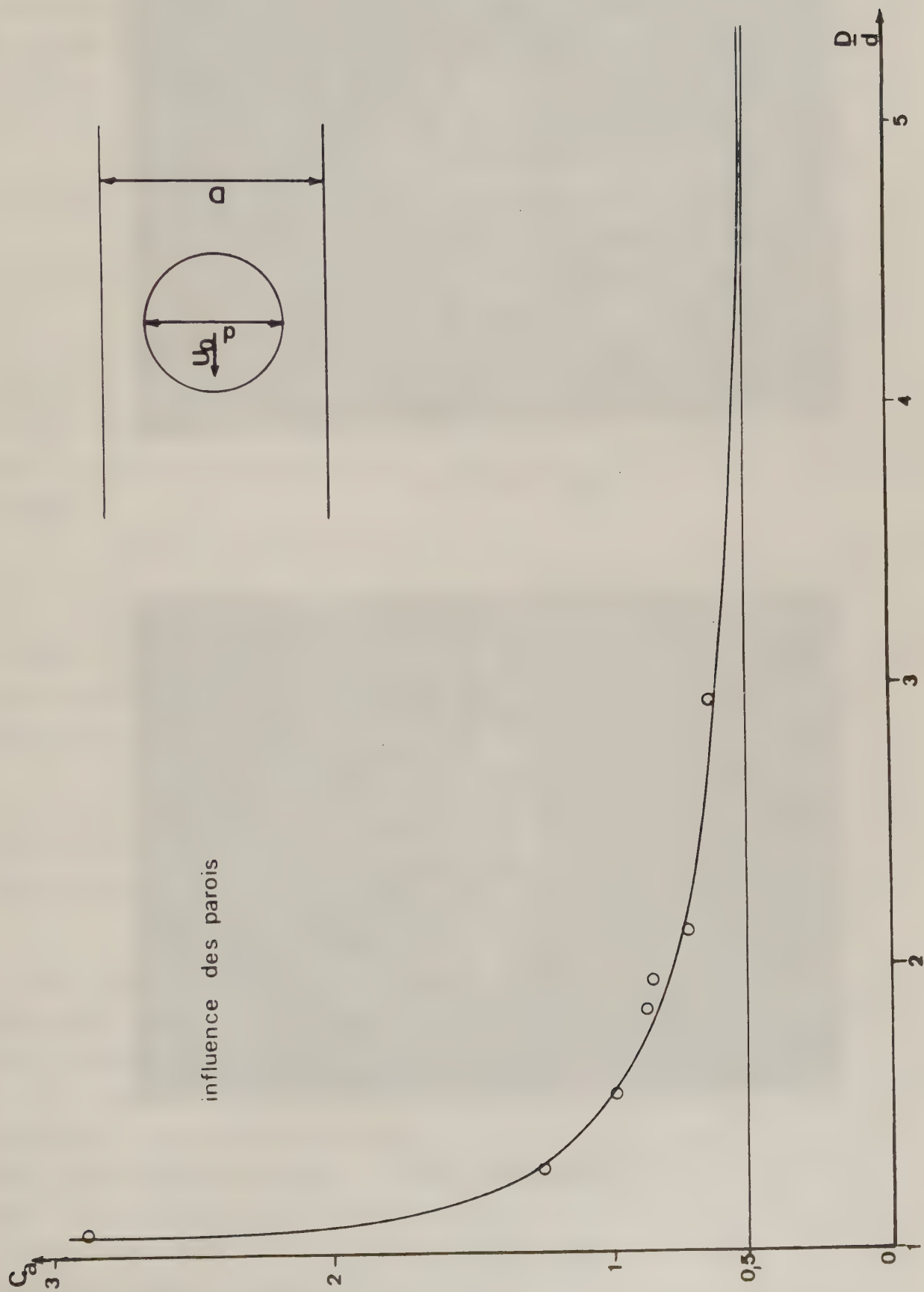
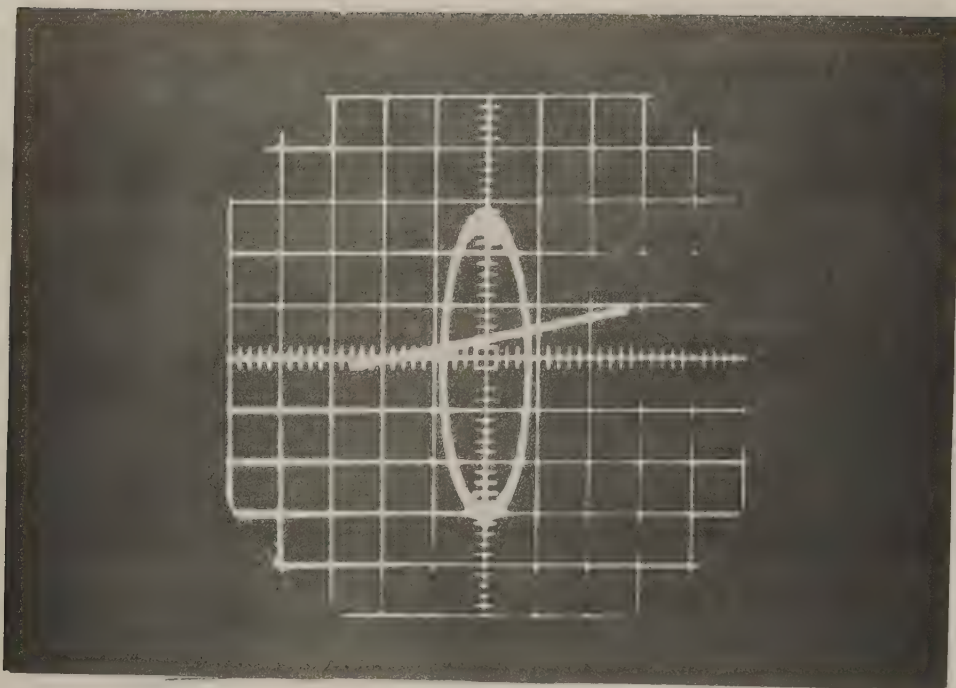
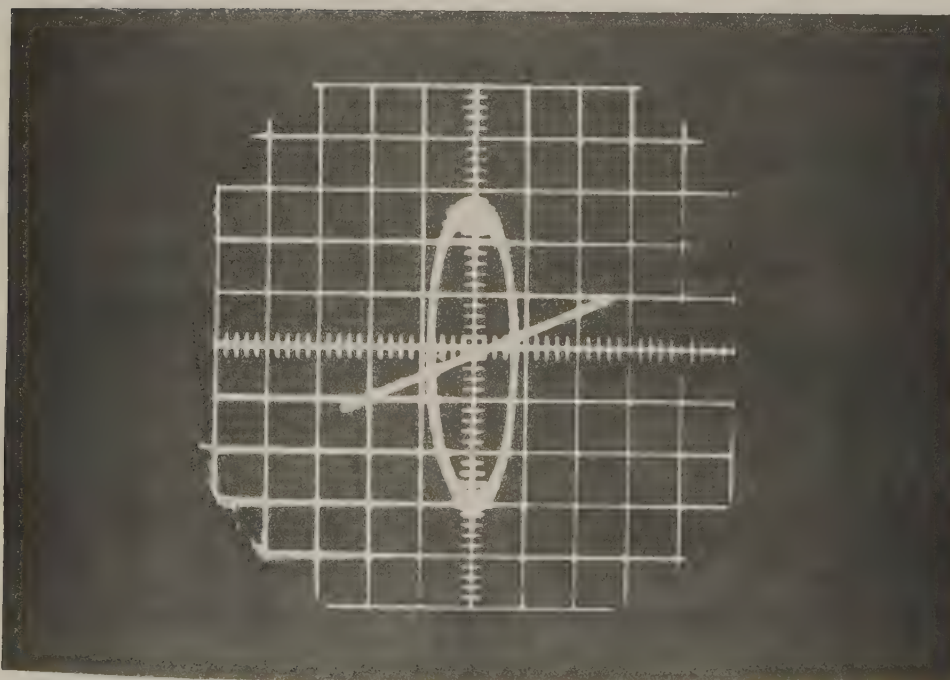


Fig. 5,3



SPHERE DANS L'AIR



SPHERE DANS L'EAU

Les plaques de déviation horizontale reçoivent, pour la voie 1, un signal proportionnel à la force d'excitation de la poutre, pour la voie 2, un signal proportionnel à la force exercée sur la sphère. La première courbe nous permet de contrôler que nous avons bien la résonance. La seconde nous donne à tout instant le rapport F sur γ , et constitue ainsi ce que l'on pourrait appeler une "balance dynamique".

Nous obtenons, dans l'air comme dans l'eau, une droite, figure 5,4. Nous pouvons en conclure que :

1°) Il n'y a pas de déphasage entre l'accélération de la sphère et la force qui la produit. L'amortissement est donc négligeable.

2°) Le rapport F sur γ est constant. La masse fictive, donc la masse ajoutée, est constante au cours d'une oscillation du corps immergé. Ceci constitue un résultat important de ces mesures, car on aurait pu attribuer la concordance des résultats théoriques et expérimentaux à un effet de moyenne ; le nombre de Reynolds, en effet, varie de manière importante au cours d'une oscillation.

Remarquons que la pente droite obtenue lorsque la sphère est immergée est plus importante que celle de la première droite. Ceci montre également que l'on a ajouté une masse à la masse réelle de la sphère. On pourrait essayer de mesurer cette masse ajoutée à partir de la variation de pente, mais, celle-ci étant faible, la mesure serait délicate et peu précise alors que la méthode présentée plus haut est commode et relativement précise.

Dans leur cours de physique théorique, LANDAU et LIFSCHITZ montrent que l'on peut affirmer que l'écoulement d'un fluide réel autour d'un obstacle animé d'un mouvement oscillatoire est potentiel dans la majeure partie du domaine fluide, si l'on se trouve dans les conditions suivantes :

$$L^2 \omega \gg \nu \quad \text{et} \quad a \ll L$$

où L est une longueur caractéristique du corps, ω la pulsation du mouvement et a son amplitude. Ces conditions traduisent, en fait, que les termes de viscosité sont négligeables devant les termes d'inertie.

Dans nos expériences, l'amplitude des vibrations est de l'ordre de un millimètre. Nos corps ont une longueur caractéristique voisine de dix centimètres. Nous opérons avec des fréquences de l'ordre de 20 hz. Donc $\omega = 40 \pi$, soit $L^2 \omega = 0,4 \text{ m}^2/\text{s}$, or la viscosité cinématique de l'eau est $\nu \simeq 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Nous vérifions donc $L^2 \omega \gg \nu$ et $a \ll L$; nous nous trouvons dans le cas cité par LANDAU. Notre écoulement est donc potentiel partout dans le fluide, sauf au contact du corps. Dans ces conditions, si l'on se réfère au calcul de la

masse ajoutée par la théorie du doublet équivalent qui ne fait intervenir que les propriétés de l'écoulement à l'infini, il devient alors évident que nos hypothèses de calcul traduisent bien nos conditions expérimentales.

Remarquons, pour conclure, que les conditions $L^2 \omega \gg v$ et $a \ll L$ ne sont pas des conditions très restrictives. En effet, pour ne pas respecter la première condition lorsque nous étudions un corps immergé dans de l'eau, il faut que ω soit très petit. Dans ce cas, les accélérations qui sont de l'ordre de $a\omega^2$ sont négligeables. Il ne sera donc plus nécessaire de tenir compte des efforts d'inertie, donc a fortiori, de calculer la masse ajoutée. Le cas L très petit n'a pas beaucoup de sens si nous nous rappelons que cette étude a été motivée par des problèmes d'hydrodynamique navale. L'autre condition $a \ll L$ est le plus souvent vérifiée. Nous pouvons donc affirmer que, dans la plupart des cas qui nous intéresseront, il est justifié de calculer la masse ajoutée d'un corps en mouvement dans un milieu infini par la théorie potentielle.

ETUDE EXPERIMENTALE DU CUBE -

On procède comme pour la sphère, on obtient :

$$C_a = 0,71 \pm 0,04$$

ce qui confirme notre calcul théorique, où l'on trouvait : $C_a = 0,68$.

Chapitre 6

ETUDE DU COEFFICIENT DE VOLUME AJOUTE DES CORPS AXISYMETRIQUES PAR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME INTERIEUR

Jusqu'à présent, nous avons mené nos études en résolvant, de différentes façons, le problème de la détermination du champ à l'extérieur du corps en mouvement. Une remarque, faite par Monsieur BRARD dans son cours d'hydrodynamique avancée, nous a inspiré une autre orientation de nos calculs. Nous allons nous attacher maintenant à la résolution d'un problème intérieur.

PRINCIPE DE LA METHODE -

Les formules de GREEN montrent que l'on peut représenter l'écoulement d'un fluide autour d'une surface fermée (S) par des distributions de sources et de doublets de densité :

$$\sigma_{M'} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{M'} \quad \text{et} \quad \mu_{M'} = \phi_{M'}$$

$\vec{n}_{M'}$, étant la normale extérieure au domaine considéré et ϕ le potentiel de l'écoulement.

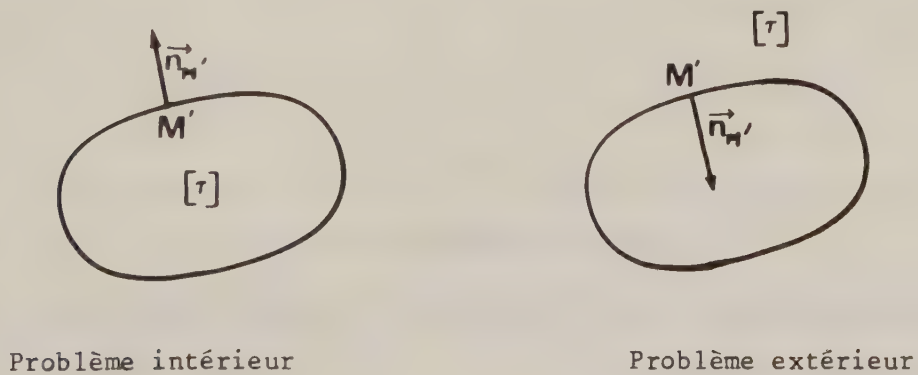


Fig. 6,1

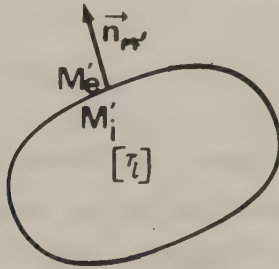
$$\sigma_{M'} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{M'} \quad ; \quad \mu_{M'} = \phi_{M'}$$

En considérant toujours la normale extérieure à la surface (S),
on a :

(6,1)

- pour l'intérieur : $\sigma_{M'_i} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{M'_i}$; $\mu_{M'_i} = \phi_{M'_i}$

- pour l'extérieur : $\sigma_{M'_e} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{M'_e}$; $\mu_{M'_e} = \phi_{M'_e}$



Soit, maintenant, ϕ_i un champ harmonique, arbitraire, défini à l'intérieur de (S). Il peut être représenté par les densités superficielles :

$$\sigma_i = - \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)_{M'_i} ; \mu_i = \phi_i M'_i$$

Elles induisent un champ identiquement nul à l'extérieur de (S). De même, on peut considérer des répartitions σ_e et μ_e qui créent le champ ϕ_e à l'extérieur et un champ nul dans le domaine intérieur :

$$\sigma_e = \left(- \frac{\partial \phi_e}{\partial n} \right)_{M'_e} ; \mu_e = \phi_e M'_e$$

Considérons maintenant la distribution obtenue en superposant les précédentes :

(6,2)

$$\sigma' = \frac{\partial}{\partial n} (\phi_e - \phi_i)_{M'} ; \mu' = - (\phi_e - \phi_i)_{M'}$$

Elle crée le champ $\begin{cases} \phi_e & \text{dans le domaine } \tau_e \\ \phi_i & \text{dans le domaine } \tau_i \end{cases}$

L'écoulement dans le domaine intérieur étant arbitraire, nous pouvons choisir ϕ_i tel que :

(6,3)

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_e \right)_{M'} = \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right)_{M'}$$

On voit alors que nous pouvons représenter les deux écoulements (intérieur et extérieur) à l'aide seulement d'une distribution de doublets.

Considérons un corps indéformable en mouvement de translation.

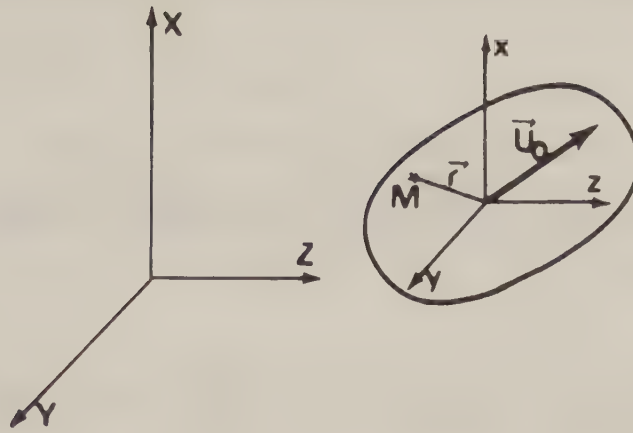


Fig. 6,2

La condition de glissement impose : $(\vec{V}_e - \vec{V}_o) \cdot \vec{n} = 0$

soit :
$$\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial n}\right)_{M'_e} = \vec{V}_o \cdot \vec{n}$$

et compte-tenu de la relation (6,3) :

(6,4)
$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n}\right)_{M'_i} = \vec{V}_o \cdot \vec{n}$$

Cette condition est réalisée en prenant un écoulement uniforme à l'intérieur du corps, soit :

(6,5)
$$\phi_i = \vec{V}_o \cdot \vec{r}$$

Le solide en mouvement peut alors être représenté par la distribution de doublets :

(6,6)
$$\mu' = - (\phi_e - \vec{V}_o \cdot \vec{r})_{M'}$$

Remarquons que l'intensité des doublets est opposée à la valeur, sur la surface S, du potentiel de l'écoulement relatif.

Nous avons finalement à résoudre le problème intérieur suivant : déterminer une densité superficielle de doublets telle que l'écoulement intérieur soit uniforme.

Le champ ϕ_i est défini par une condition de Neumann ; pour que la solution existe, il faut que l'on ait :

$$\iint_S \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS = \iint_S \frac{\partial \phi_e}{\partial n} dS$$

ce qui montre que, pour éliminer la distribution de sources, il est nécessaire que le corps soit indéformable.

Pour déterminer cette distribution, il suffit d'écrire que sur l'axe OZ on a :

$$z_i = V_0 z \quad (z \in \tau_i)$$

puisque cet axe est ligne de courant par raison de symétrie.

Les calculs sont effectués en prenant arbitrairement $V_0 = 1$

MISE EN EQUATION -

Nous choisissons de prendre des répartitions trapézoïdales de doublets normaux à la surface de la sphère, celles-ci étant limitées par N valeurs μ_i que nous cherchons à déterminer.

$$\mu = \mu_i \frac{\alpha - \alpha_{i+1}}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} + \mu_{i+1} \frac{\alpha_i - \alpha}{\alpha_i - \alpha_{i+1}}$$

En un point M_i de l'axe OZ nous avons :

$$z_i = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \frac{\vec{M}'M_i \cdot \vec{n}'}{|\vec{M}'M_i|^3} dS$$

soit :

$$z_i = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mu \frac{\vec{M}'M_i \cdot \vec{n}'}{|\vec{M}'M_i|^3} |\vec{OM}'|^2 \sin \alpha \, d\alpha \, d\theta$$

$$z_i = \frac{1}{2} \int_0^\pi \mu \frac{\vec{M}'M_i \cdot \vec{n}'}{|\vec{M}'M_i|^3} |\vec{OM}'|^2 \sin \alpha \, d\alpha$$

$$z_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \mu \frac{\vec{M}'M_i \cdot \vec{n}'}{|\vec{M}'M_i|^3} |\vec{OM}'|^2 \sin \alpha \, d\alpha$$

Afin de simplifier l'écriture, nous achevons les calculs correspondant au cas d'une sphère ; mais la méthode reste applicable dans le cas d'un corps axisymétrique quelconque dans la mesure où on peut le décrire avec suffisamment de précision.

$$z_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \left(\mu_j \frac{\alpha - \alpha_{j+1}}{\alpha_j - \alpha_{j+1}} + \mu_{j+1} \frac{\alpha_j - \alpha}{\alpha_j - \alpha_{j+1}} \right) \times \frac{1 - z_i \cos \alpha}{(1 + z_i^2 - 2 z_i \cos \alpha)^{3/2}} \sin \alpha \, d\alpha$$

soit :

$$(6,7) \quad z_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \mu_j$$

$$A_{i,1} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \times \frac{1 - z_i \cos \alpha}{(1 + z_i^2 - 2 z_i \cos \alpha)^{3/2}} \sin \alpha \, d\alpha$$

$$\text{avec :} \quad A_{i,j} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \frac{\alpha - \alpha_{j+1}}{\alpha_j - \alpha_{j+1}} \times \frac{1 - z_i \cos \alpha}{(1 + z_i^2 - 2 z_i \cos \alpha)^{3/2}} \sin \alpha \, d\alpha$$

$$(6,8) \quad + \frac{1}{2} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{\alpha_{j-1} - \alpha}{\alpha_{j-1} - \alpha_j} \times \frac{1 - z_i \cos \alpha}{(1 + z_i^2 - 2 z_i \cos \alpha)^{3/2}} \sin \alpha \, d\alpha$$

$$A_{i,N} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_{N-1}}^{\alpha_N} \frac{\alpha_{N-1} - \alpha}{\alpha_{N-1} - \alpha_N} \times \frac{1 - z_i \cos \alpha}{(1 + z_i^2 - 2 z_i \cos \alpha)^{3/2}} \sin \alpha \, d\alpha$$

On écrit cette équation pour N points quelconques, mais distincts, de l'axe OZ ; on obtient ainsi un système linéaire de N équations à N inconnues. Sa résolution donne des solutions acceptables si N ne dépasse pas 12. C'est suffisant pour calculer avec précision le volume ajouté d'une sphère. Mais, si nous voulons pouvoir appliquer cette méthode à des corps de forme plus compliquée, il nous faut disposer de plus de segments.

La difficulté provient de ce que tous les A_{ij} , pour j voisin de N/2, sont très faibles devant les autres ; ceci est dû au fait que les doublets correspondants sont très éloignés des points influencés. Pour remédier à ce défaut, nous avons cherché à imposer une seconde condition traduisant que l'écoulement intérieur est uniforme.

Avec le choix des axes que nous avons fait, nous devons avoir $\phi_i = 0$ dans le plan XOY. Nous pouvons donc écrire, par exemple, qu'en un point P de l'axe OX nous avons :

$$0 = \frac{1}{4 \pi} \iint_S \mu \frac{\vec{M}'P \cdot \vec{n}}{|\vec{M}'P|^3} \, dS$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$0 = \sum_{j=1}^N b_j \mu_j$$

En considérant N points P_i sur l'axe OX , on obtient un nouveau système linéaire :

$$0 = \sum_{j=1}^N B_{ij} \mu_j \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

Ce système n'est pas directement soluble à l'aide des programmes classiques, puisque ceux-ci ne trouveraient que la solution triviale $\mu_j = 0$ quelque soit j . Mais nous pouvons combiner nos deux systèmes d'équations et écrire :

$$\sum_{j=1}^N (A_{ij} + B_{ij}) \mu_j = z_i \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

La résolution de ce système ne donne pas de meilleurs résultats.

Remarquons que le fait d'écrire que le potentiel est linéaire sur l'axe du corps conduit à une solution unique du problème. Les mauvais résultats ne sont donc pas dus à une indétermination. Nous savons, en effet, que le potentiel de l'écoulement intérieur a pour expression en coordonnées sphériques :

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta)$$

Dans notre problème, il est défini pour $r=0$, donc $B_n = 0$ quel que soit n .

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$$

Supposons qu'il existe deux solutions distinctes ϕ_1 et ϕ_2

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{1n} r^n P_n(\cos \theta)$$

$$\phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos \theta)$$

On peut les retrancher membre à membre, on obtient :

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{1n} - A_{2n}) r^n P_n(\cos \theta)$$

Cette équation doit être également vérifiée sur l'axe oz , donc pour $\cos \theta = \pm 1$ et $P_n(\cos \theta) = \pm 1$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_{1n} - A_{2n}) r^n = 0$$

quel que soit r . Ceci impose $A_{1n} - A_{2n} = 0$, donc la solution est unique.

La figure (6,4) montre comment les solutions se dégradent lorsqu'on augmente le nombre de singularités.

Il faut, cependant, remarquer qu'une sphère peut être correctement représentée par dix sections tronc-coniques. Mais, actuellement, nous ne sommes pas en mesure de généraliser cette méthode à des corps axisymétriques ayant une géométrie qui nécessite, pour la représenter fidèlement, de disposer sur sa méridienne un grand nombre de segments. Nous cherchons à améliorer la méthode de résolution numérique.

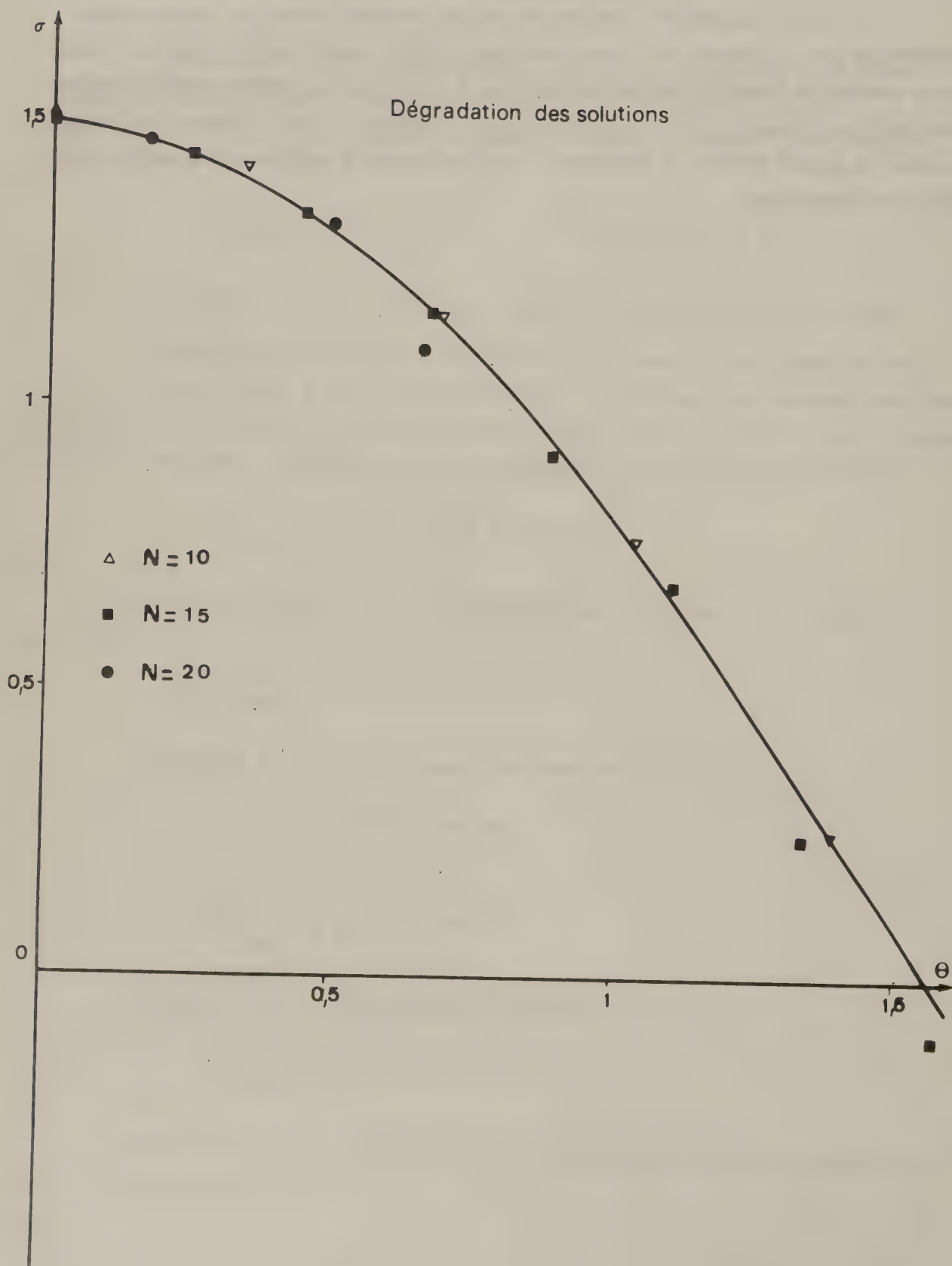


Fig. 6,4

FORMULAIRE

Nous allons indiquer dans ce formulaire les principales relations entre les fonctions elliptiques qui nous ont été nécessaires pour la résolution du problème des parallélépipèdes entre deux parois.

FONCTIONS THETA -

$\tau = i \frac{K'}{K}$; $q = e^{i\pi\tau}$; $v = \frac{u}{2K}$

$\theta_1(v/q) = 2q^{1/4} \sum_0^\infty (-1)^n q^{n(n+1)} \sin (2n+1) \pi v$

$\theta_2(v/q) = 2q^{1/4} \sum_0^\infty q^{n(n+1)} \cos (2n+1) \pi v$

$\theta_3(v/q) = 1 + 2 \sum_1^\infty q^{n^2} \cos 2n \pi v$

$\theta_4(v/q) = 1 + 2 \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos 2n \pi v$

CHANGEMENT D'ARGUMENT -

	-v	v±1/2	v±1	$v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$	v + τ	$v + \frac{\tau}{2}$	v - 1 + τ
$\theta_1(v/q)$	$-\theta_1$	$\pm\theta_2$	$-\theta_1$	$q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \theta_3$	$-\frac{1}{q} e^{-2i\pi v} \theta_1$	$i q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \theta_4$	$-\frac{1}{q} e^{-2i\pi v} \theta_1$
$\theta_2(v/q)$	θ_2	$\pm\theta_1$	$-\theta_2$	$-i q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \theta_4$	$\frac{1}{q} e^{-2i\pi v} \theta_2$	$q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \theta_3$	$-\frac{1}{q} e^{-2i\pi v} \theta_2$
$\theta_3(v/q)$	θ_3	θ_4	θ_3	$i q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \theta_1$	$\frac{1}{q} e^{-2i\pi v} \theta_3$	$q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \theta_2$	$\frac{1}{q} e^{-2i\pi v} \theta_3$
$\theta_4(v/q)$	θ_4	θ_3	θ_4	$q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \theta_2$	$-\frac{1}{q} e^{-2i\pi v} \theta_4$	$i q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v} \theta_1$	$-\frac{1}{q} e^{-2i\pi v} \theta_4$

CARRES DES FONCTIONS THETA -

$$\theta_1^2(v/q) = \frac{\theta_3^2(v/q) \cdot \theta_2^2(0/q) - \theta_3^2(v/q) \cdot \theta_3^2(0/q)}{\theta_4^2(0/q)}$$

$$\theta_2^2(v/q) = \frac{\theta_4^2(v/q) \cdot \theta_2^2(0/q) - \theta_1^2(v/q) \cdot \theta_3^2(0/q)}{\theta_4^2(0/q)}$$

$$\theta_3^2(v/q) = \frac{\theta_4^2(v/q) \cdot \theta_3^2(0/q) - \theta_1^2(v/q) \cdot \theta_2^2(0/q)}{\theta_4^2(0/q)}$$

$$\theta_4^2(v/q) = \frac{\theta_3^2(v/q) \cdot \theta_3^2(0/q) - \theta_2^2(v/q) \cdot \theta_2^2(0/q)}{\theta_4^2(0/q)}$$

FORMULES D'ADDITION -

$$\theta_2(v+w) \theta_2(v-w) = \frac{\theta_4^2(v) \cdot \theta_2^2(w) - \theta_1^2(v) \cdot \theta_3^2(w)}{\theta_4^2(0)} = \frac{\theta_2^2(v) \cdot \theta_4^2(w) - \theta_3^2(v) \cdot \theta_1^2(w)}{\theta_4^2(0)}$$

$$\theta_3(v+w) \theta_3(v-w) = \frac{\theta_4^2(v) \cdot \theta_3^2(w) - \theta_1^2(v) \cdot \theta_2^2(w)}{\theta_4^2(0)} = \frac{\theta_3^2(v) \cdot \theta_4^2(w) - \theta_2^2(v) \cdot \theta_1^2(w)}{\theta_4^2(0)}$$

$$\theta_4(v+w) \theta_4(v-w) = \frac{\theta_3^2(v) \cdot \theta_3^2(w) - \theta_2^2(v) \cdot \theta_2^2(w)}{\theta_4^2(0)} = \frac{\theta_4^2(v) \cdot \theta_4^2(w) - \theta_1^2(v) \cdot \theta_1^2(w)}{\theta_4^2(0)}$$

$$= \frac{\theta_4^2(v) \cdot \theta_2^2(w) + \theta_3^2(v) \cdot \theta_1^2(w)}{\theta_2^2(0)} = \frac{\theta_2^2(v) \cdot \theta_4^2(w) + \theta_1^2(v) \cdot \theta_3^2(w)}{\theta_2^2(0)}$$

$$= \frac{\theta_4^2(v) \cdot \theta_3^2(w) + \theta_2^2(v) \cdot \theta_1^2(w)}{\theta_3^2(0)} = \frac{\theta_3^2(v) \cdot \theta_4^2(w) + \theta_1^2(v) \cdot \theta_2^2(w)}{\theta_3^2(0)}$$

ARGUMENT DOUBLE -

$$\theta_1(2v/q) = \frac{2 \cdot \theta_1(v) \cdot \theta_2(v) - \theta_3(v) \cdot \theta_4(v)}{\theta_2(0) \cdot \theta_3(0) \cdot \theta_4(0)}$$

$$\theta_2(2v/q) = \frac{\theta_2^2(v) \cdot \theta_3^2(v) - \theta_1^2(v) \cdot \theta_4^2(v)}{\theta_2(0) \cdot \theta_3^2(0)}$$

$$\theta_3(2v/q) = \frac{\theta_2^2(v) \cdot \theta_3^2(v) + \theta_1^2(v) \cdot \theta_4^2(v)}{\theta_2^2(0) \cdot \theta_3(0)}$$

$$\theta_4(2v/q) = \frac{\theta_3^2(v) - \theta_2^4(v)}{\theta_4^3(0)} = \frac{\theta_4^4(v) - \theta_1^4(v)}{\theta_4^3(0)}$$

TRANSFORMATION DE JACOBI -

$$\tau' = -\frac{1}{\tau} \quad q' = e^{-i\pi \frac{1}{\tau}} = e^{-\pi \frac{K}{K'}} \quad v' = \frac{v}{\tau} = v \frac{K}{K'}$$

$$\theta_1(v'/q') = i \frac{K}{K'} e^{\pi v'^2 \frac{K'}{K}} \theta_1(v/q)$$

$$\theta_2(v'/q') = \frac{K}{K'} e^{\pi v'^2 \frac{K'}{K}} \theta_4(v/q)$$

$$\theta_3(v'/q') = \frac{K}{K'} e^{\pi v'^2 \frac{K'}{K}} \theta_3(v/q)$$

$$\theta_4(v'/q') = \frac{K}{K'} e^{\pi v'^2 \frac{K'}{K}} \theta_2(v/q)$$

TRANSFORMATION DE LANDEN -

$$\theta_1(2v/q^2) = \frac{\theta_1(v/q) \cdot \theta_2(v/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

$$\theta_2(2v/q^2) = \frac{\theta_3^2(v/q) - \theta_4^2(v/q)}{2 \theta_2(0/q^2)} = \frac{\theta_2^2(v/q) - \theta_1^2(v/q)}{2 \theta_3(0/q^2)}$$

$$\theta_3(2v/q^2) = \frac{\theta_3^2(v/q) + \theta_4^2(v/q)}{2 \theta_3(0/q^2)} = \frac{\theta_2^2(v/q) + \theta_1^2(v/q)}{2 \theta_2(0/q^2)}$$

$$\theta_4(2v/q^2) = \frac{\theta_3(v/q) \theta_4(v/q)}{\theta_4(0/q^2)}$$

$$\theta_1'(0/q^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (\theta_2^3(0) \theta_1'(0))^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{\theta_2(0) \theta_1'(0)}{(\theta_3(0) \cdot \theta_4(0))^{1/2}}$$

$$\theta_2(0/q^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_3^2(0) - \theta_4^2(0))^{\frac{1}{2}}; \theta_3(0/q^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_3^2(0) + \theta_4^2(0))^{\frac{1}{2}}; \theta_4(0/q^2) = (\theta_3(0) \cdot \theta_4(0))^{\frac{1}{2}}$$

DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER -

$$\frac{\theta_1'(v/q)}{\theta_1(v/q)} = \pi \cotg(\pi v) + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n \pi v$$

$$\frac{\theta_2'(v/q)}{\theta_2(v/q)} = -\pi \tg(\pi v) + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n \pi v$$

$$\frac{\theta_3'(v/q)}{\theta_3(v/q)} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n \pi v$$

$$\frac{\theta_4'(v/q)}{\theta_4(v/q)} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n \pi v$$

$$\text{Log } \pi \frac{\theta_1(v/q)}{\theta_1'(0/q)} = \text{Log}(\sin \pi v) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \times \frac{\sin^2 n \pi v}{n}$$

$$\text{Log } \frac{\theta_2(v/q)}{\theta_2'(0/q)} = \text{Log}(\cos \pi v) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \times \frac{\sin^2 n \pi v}{n}$$

$$\text{Log } \frac{\theta_3(v/q)}{\theta_3(0/q)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n}} \times \frac{\sin^2 n \pi v}{n}$$

$$\text{Log } \frac{\theta_4(v/q)}{\theta_4(0/q)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \times \frac{\sin^2 n \pi v}{n}$$

$$\frac{1}{2} \text{Log } \frac{\theta_1(v+w)}{\theta_1(v-w)} = \frac{1}{2} \text{Log } \frac{\sin \pi (v+w)}{\sin \pi (v-w)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n \pi v \sin 2n \pi w$$

$$\frac{1}{2} \text{Log } \frac{\theta_2(v+w)}{\theta_2(v-w)} = \frac{1}{2} \text{Log } \frac{\cos \pi (v+w)}{\sin \pi (v-w)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n \pi v \sin 2n \pi w$$

$$\frac{1}{2} \text{Log } \frac{\theta_3(v+w)}{\theta_3(v-w)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n \pi v \sin 2n \pi w$$

$$\frac{1}{2} \text{Log } \frac{\theta_4(v+w)}{\theta_4(v-w)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n \pi v \sin 2n \pi w$$

FONCTIONS DE JACOBI -

Définition :

$$k = \frac{\theta_2^2(0/q)}{\theta_3^2(0/q)} ; \quad k' = \frac{\theta_4^2(0/q)}{\theta_3^2(0/q)} ; \quad v = \frac{u}{2K}$$

$$\sin(u; k) = \frac{\theta_3}{\theta_2} \frac{\theta_1(v/q)}{\theta_4(v/q)} ; \quad \text{cn}(u; k) = \frac{\theta_4}{\theta_2} \frac{\theta_2(v/q)}{\theta_4(v/q)} ; \quad \text{dn}(u; k) = \frac{\theta_4}{\theta_3} \frac{\theta_3(v/q)}{\theta_4(v/q)}$$

Formules d'addition :

$$\text{sn}(u \pm v) = \frac{\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v \pm \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}$$

$$\text{cn}(u \pm v) = \frac{\text{cn } u \text{ cn } v \pm \text{sn } u \text{ sn } v \text{ dn } u \text{ dn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}$$

$$\text{dn}(u \pm v) = \frac{\text{dn } u \text{ dn } v \pm k^2 \text{sn } u \text{ sn } v \text{ cn } u \text{ cn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}$$

$$\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1$$

$$\text{sn}^2 u = \frac{1 - \text{cn}^2 u}{1 + \text{dn}^2 u} ; \quad \text{cn}^2 u = \frac{\text{cn}^2 u + \text{dn}^2 u}{1 + \text{dn}^2 u} ; \quad \text{dn}^2 u = \frac{\text{dn}^2 u + k^2 \text{cn}^2 u + k'^2}{1 + \text{dn}^2 u}$$

Développement en série de Fourier :

$$\text{sn}(u; k) = \frac{2\pi}{kK} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{q^{p+\frac{1}{2}}}{1-q^{2p+1}} \sin(2p+1)\pi v$$

$$\text{cn}(u; k) = \frac{2\pi}{kK} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{q^{p+\frac{1}{2}}}{1+q^{2p+1}} \cos(2p+1)\pi v$$

$$\text{dn}(u; k) = \frac{2\pi}{K} \frac{1}{4} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q^p}{1+q^{2p}} \cos p\pi v$$

Annexe 2

TABLE DES VALEURS DE q

Ces tables donnent les valeurs de la variable q en fonction des paramètres E/L et P/L.

$$q = e^{-\pi \frac{K}{K'}}$$

$$\frac{P}{L} = 1 - u + \frac{4}{\pi} \text{Log } (q) \frac{q \sin \pi u - 2q^4 \sin \pi u + 3q^9 \sin \pi u}{1 - 2q \cos \pi u + 2q^4 \cos \pi u + 2q^9 \cos \pi u}$$

$$\frac{E}{L} = \left(1 - \frac{P}{L} - u\right) \frac{K}{K'}$$

Il est aisé de déduire de la valeur de q celle de la seconde variable u.

REMARQUE

Toutes les valeurs de q non indiquées dans ce tableau sont supérieures à 0,4. Or, nous admettons que nos développements ne sont valables que jusqu'à cette valeur, nous ne les avons donc pas calculées.

P/L E/L	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
0,01	0,01286	0,00712	0,00504	0,00398	0,00337	0,00298	0,00273
0,02	0,02262	0,01312	0,00950	0,00762	0,00651	0,00581	0,00538
0,03	0,03071	0,01843	0,01356	0,01102	0,00950	0,00855	0,00796
0,04	0,03772	0,02324	0,01737	0,01424	0,01237	0,01121	0,01049
0,05	0,04393	0,02767	0,02094	0,01732	0,01515	0,01381	0,01300
0,06	0,04953	0,03179	0,02432	0,02028	0,01785	0,01636	0,01548
0,07	0,05464	0,03566	0,02755	0,02314	0,02049	0,01887	0,01794
0,08	0,05937	0,03932	0,03065	0,02591	0,02308	0,02136	0,02039
0,09	0,06377	0,04279	0,03364	0,02862	0,02562	0,02382	0,02283
0,10	0,06789	0,04612	0,03654	0,03127	0,02812	0,02625	0,02526
0,15	0,08560	0,06105	0,04994	0,04381	0,04024	0,03826	0,03745
0,20	0,10018	0,07411	0,06216	0,05563	0,05197	0,05017	0,04977
0,25	0,11295	0,08605	0,07370	0,06706	0,06355	0,06212	0,06233
0,30	0,12456	0,09730	0,08482	0,07830	0,07509	0,07418	0,07512
0,35	0,13541	0,10807	0,09567	0,08941	0,08665	0,08636	0,08812
0,40	0,14571	0,11852	0,010635	0,10046	0,09824	0,09865	0,10128
0,45	0,15562	0,12873	0,11691	0,11148	0,10985	0,11101	0,11456
0,50	0,16523	0,13876	0,12737	0,12246	0,12147	0,12340	0,12788

q

P/L E/L	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
0,01	0,00257	0,00251	0,00250	0,00256	0,00268	0,00289
0,02	0,00512	0,00501	0,00502	0,00516	0,00545	0,00592
0,03	0,00763	0,00750	0,00756	0,00782	0,00830	0,00907
0,04	0,01011	0,01000	0,01013	0,01053	0,01124	0,01235
0,05	0,01259	0,01250	0,01273	0,01329	0,01425	0,01574
0,06	0,01506	0,01502	0,01537	0,01611	0,01735	0,01926
0,07	0,01753	0,01756	0,01803	0,01899	0,02053	0,02288
0,08	0,02000	0,02012	0,02073	0,02191	0,02379	0,02661
0,09	0,02248	0,02270	0,02347	0,02490	0,02712	0,03045
0,10	0,02497	0,02529	0,02625	0,02793	0,03053	0,03439
0,15	0,03760	0,03866	0,04070	0,04390	0,04861	0,05545
0,20	0,05060	0,05264	0,05602	0,06102	0,06816	0,07829
0,25	0,06401	0,06719	0,07207	0,07904	0,08876	0,10228
0,30	0,07777	0,08221	0,08869	0,09770	0,11000	0,12682
0,35	0,09182	0,09757	0,10570	0,11673	0,13155	0,15147
0,40	0,10608	0,11317	0,12291	0,13592	0,15310	0,17585
0,45	0,12045	0,12887	0,14019	0,15507	0,17445	0,19974
0,50	0,13487	0,14458	0,15741	0,17403	0,19541	0,22295

q

P/L E/L	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0,01	0,00322	0,00373	0,00457	0,00606	0,00930	0,02035
0,02	0,00664	0,00778	0,00964	0,01301	0,02050	0,04726
0,03	0,01026	0,01211	0,01516	0,02074	0,03331	0,07856
0,04	0,01405	0,01670	0,02109	0,02917	0,04748	0,11226
0,05	0,01801	0,02155	0,02741	0,03823	0,06273	0,14673
0,06	0,02214	0,02664	0,03408	0,04785	0,07882	0,18085
0,07	0,02643	0,03195	0,04108	0,05794	0,09549	0,21392
0,08	0,03087	0,03747	0,04838	0,06844	0,11253	0,24554
0,09	0,03545	0,04319	0,05594	0,07926	0,12976	0,27553
0,10	0,04017	0,04908	0,06373	0,09033	0,14701	0,30383
0,15	0,06548	0,08070	0,10509	0,14747	0,23018	
0,20	0,09288	0,11452	0,14814	0,20375	0,30405	
0,25	0,12136	0,14901	0,19060	0,25638	0,36755	
0,30	0,15011	0,18308	0,23122	0,30442		
0,35	0,17854	0,21606	0,26940	0,34782		
0,40	0,20626	0,24758	0,30495	0,38687		
0,45	0,23303	0,27746	0,33788			
0,50	0,25869	0,30565	0,36815			

q

P/L E/L	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
0,60	0,18378	0,15840	0,14804	0,14429	0,14465	0,14816	0,15447
0,70	0,20165	0,17757	0,16836	0,16585	0,16759	0,17264	0,18068
0,80	0,21897	0,19628	0,18830	0,18703	0,19011	0,19662	0,20625
0,90	0,23577	0,21454	0,20778	0,20773	0,21208	0,21993	0,23100
1,00	0,25208	0,23232	0,22676	0,22787	0,23340	0,24248	0,25481
1,10	0,26791	0,24959	0,24519	0,24740	0,25401	0,26419	0,27764
1,20	0,28326	0,26634	0,26305	0,26628	0,27389	0,28505	0,29946
1,30	0,29813	0,28257	0,28033	0,28450	0,29300	0,30503	0,32029
1,40	0,31253	0,29828	0,29701	0,30206	0,31137	0,32416	0,34014
1,50	0,32647	0,31345	0,31312	0,31895	0,32899	0,34245	0,35904
1,60	0,33995	0,32812	0,32864	0,33520	0,34589	0,35994	0,37705
1,70	0,35299	0,34228	0,34360	0,35082	0,36209	0,37664	0,39419
1,80	0,36561	0,35595	0,35801	0,36584	0,37762	0,39261	
1,90	0,37781	0,36915	0,37190	0,38027	0,39250		
2,00	0,38960	0,38189	0,38527	0,39414			

q

P/L E/L	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
0,60	0,16357	0,17570	0,19127	0,21098	0,23577	0,26699
0,70	0,19172	0,20599	0,22393	0,24618	0,27375	0,30760
0,80	0,21902	0,23515	0,25506	0,27936	0,30889	0,34480
0,90	0,24528	0,26299	0,28452	0,31045	0,34153	0,37878
1,00	0,27040	0,28944	0,31229	0,33947	0,37168	
1,10	0,29435	0,31449	0,33840	0,36654	0,39953	
1,20	0,31712	0,33817	0,36290	0,39175		
1,30	0,33874	0,36052	0,38590			
1,40	0,35925	0,38162				
1,50	0,37871					
1,60	0,39716					

q

P/L E/L	0,70	0,75
0,60	0,30652	0,35704
0,70	0,34971	
0,80	0,38857	

PROGRAMMES

Nous donnons ici les listings de deux programmes que nous avons cités dans le texte.

AXIF et AXISY sont des soubroulines qui déterminent le coefficient de masse ajoutée de corps axisymétriques en plaçant à leur surface des anneaux de source. Dans le premier, on impose en plus la condition de fermeture ; le second traite le cas des corps axisymétriques qui possèdent en plus un plan de symétrie perpendiculaire à leur axe. Il permet de doubler le nombre d'inconnues.

VAMA est un programme de résolution des systèmes linéaires, fondé sur la méthode du pivot. QG10 est une routine IBM qui intègre à l'aide de quadrature de GAUSS en découpant l'intervalle en dix segments égaux. Ces deux sous programmes ne sont pas donnés in extenso mais peuvent être remplacés par tout autre programme équivalent.

SUBROUTINE AXIF(N,VR,DS)

DETERMINATION DU VOLUME AJOUTE ET DU COEFFICIENT DE MASSE AJOUTEE
D'UN CORPS AXISYMETRIQUE

ON IMPOSE LA CONDITION DE FERMETURE

Z(I) ABSCISSE DE L'ANNEAU I

RAYON DE L'ANNEAU R(I)

AL(I) ANGLE DE LA NORMALE A LA MERIDIENNE ET DE L'AXE

```

SUBROUTINE AXI(N,VR,DS)
EXTERNAL AFY
DIMENSION A(30,30),B(30)
COMMON Z(30),R(30),AL(30),RI,RJ,ZI,ZJ,CJ,SJ,U
1 FORMAT('1'///30X,'POSITION DES SINGULARITES'//10X,'I',
113X,'Z(I)',13X,'R(I)',13X,'ALPHA(I)'///)
2 FORMAT(9X,I3,5X,E16.6,5X,E15.6,5X,E15.6/)
3 FORMAT(3X,10E11.2)
4 FORMAT(/)
5 FORMAT(/10X,'DENSITE DE SOURCES'///)
6 FORMAT(10X,'B('',I2,'')='',E13.6/)
7 FORMAT('1')
8 FORMAT(///10X,'VOLUME REEL',E16.6///10X,'VOLUME FICTIF',E16.6
1///10X,'VOLUME AJOUTE',E16.6////////10X,'COEFFICIENT DE VOLUME
2AJOUTE',E13.3)
PI=3.141592
XL=0.

```

LE CORPS ET LA POSITION DES SINGULARITES SONT DEFINIS PAR LE
PROGRAMME D'APPEL

```

WRITE(3,1)
WRITE(3,2)(I,Z(I),R(I),AL(I),I=1,N)
WRITE(3,7)

```

DETERMINATION DES INTENSITES DES ANNEAUX DE SOURCE

```

DO 20 I=1,N
RI=R(I)
ZI=Z(I)
A(I,I)=1.+DS*RI/(2*PI)
DO 200 K=1,N
CJ=COS(AL(K))
SJ=SIN(AL(K))
RJ=R(K)
ZJ=Z(K)
CALL QG10(XL,PI,AFY,YIK)

```

```

      YIK=YIK*DS/(2.*PI)
      IF(I-K)210,200,210
210  A(K,I)=YIK*RI/RJ+DS*RI/(2*PI)
      A(I,I)=A(I,I)-YIK
200  CONTINUE
      B(I)=COS(AL(I))
20  CONTINUE
      DO 30 I=1,N
      WRITE(3,3)(A(I,J),J=1,N)
30  WRITE(3,4)
      WRITE(3,7)
      CALL VAMA(A,B,N)
      DO 40 I=1,N
      WRITE(3,3)(A(I,J),J=1,N)
40  WRITE(3,4)
      WRITE(3,7)
      WRITE(3,5)
      WRITE(3,6)(I,B(I),I=1,N)
      WRITE(3,7)

```

CALCUL DU VOLUME AJOUTE

```

      VF=0.
      DO 50 I=1,N
      VF=VF+(2.*PI*DS*B(I)*R(I)*Z(I))
50  CONTINUE
      VA=VF-VR
      CA=VA/VR
      WRITE(3,8)VR,VF,VA,CA
      RETURN
      END

```

FUNCTION AFY(T)

CONTRIBUTION ELEMENTAIRE DE LA SOURCE I AU POTENTIEL AU POINT J

```

      COMMON Z(30),R(30),AL(30),RI,RJ,ZI,ZJ,CJ,SJ,U
      AFY((((RJ-RI*COS(T))*SJ)+(ZJ-ZI)*CJ)*RJ)/((RI*RI+RJ*RJ+
      2*(ZJ-ZI)*(ZJ-ZI)-2.*RI*RJ*COS(T))**.5)
      RETURN
      END

```

SUBROUTINE AXISY(N,VR,DS)

DETERMINATION DU VOLUME AJOUTE ET DU COEFFICIENT DE VOLUME AJOUTE
D'UN CORPS AXISYMETRIQUE ET A PLAN DE SYMETRIE PERPENDICULAIRE A :
SON AXE

Z(I) ABSCISSE DE L'ANNEAU I

RAYON DE L'ANNEAU R(I)

AL(I) ANGLE DE LA NORMALE A LA MERIDIENNE ET DE L'AXE

SUBROUTINE AXISY(N,VR,DS)

EXTERNAL AFY

DIMENSION A(30,30),B(60)

COMMON Z(60),R(60),AL(60),RI,RJ,ZI,ZJ,CJ,SJ,U

1 FORMAT('1'///30X,'POSITION DES SINGULARITES'///10X,'I',
113X,'Z(I)',13X,'R(I)',13X,'ALPHA(I)'///)

2 FORMAT(9X,I3,5X,E16.6,5X,E15.6,5X,E15.6//)

5 FORMAT(/10X,'DENSITE DE SOURCES'///)

6 FORMAT(10X,'B(',I2,')=' ,E13.6//)

7 FORMAT('1')

8 FORMAT(///10X,'VOLUME REEL',E16.6///10X,'VOLUME FICTIF',E16.6
1///10X,'VOLUME AJOUTE',E16.6////////10X,'COEFFICIENT DE VOLUME
2AJOUTE',E13.3)

XL=0.

PI=3.141592

LE CORPS ET LA POSITION DES SINGULARITES SONT DEFINIS PAR LE
PROGRAMME D'APPEL

WRITE(3,1)

WRITE(3,2)(I,Z(I),R(I),AL(I),I=1,N)

N05=N/2

DETERMINATION DES INTENSITES DES ANNEAUX DE SOURCE

DO 20 I=1,N05

A(I,I)=1.

RI=R(I)

ZI=Z(I)

DO 200 K=1,N

CJ=COS(AL(K))

SJ=SIN(AL(K))

RJ=R(K)

ZJ=Z(K)

CALL QG10(XL,PI,AFY,YIK)

YIK=YIK*DS/(2.*PI)

IF(I=K)210,200,210

10 A(I,I)=A(I,I)-YIK

IF(K=N05)221,221,220

21 A(K,I)=YIK*RI/RJ

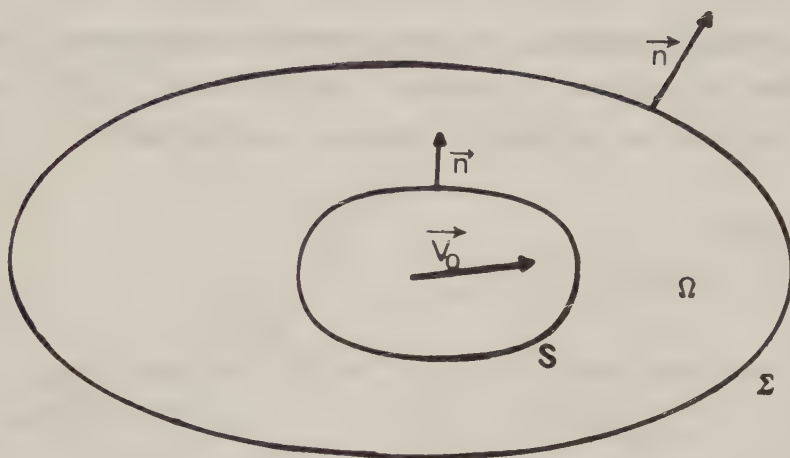
GO TO 200

```
A(I,I)=A(I,I)-YIK
200 CONTINUE
B(I)=COS(AL(I))
20 CONTINUE
DO 30 I=1,N
WRITE(3,3)(A(I,J),J=1,N)
30 WRITE(3,4)
WRITE(3,7)
CALL VAMA(A,B,N)
DO 40 I=1,N
WRITE(3,3)(A(I,J),J=1,N)
40 WRITE(3,4)
WRITE(3,7)
WRITE(3,5)
WRITE(3,6)(I,B(I),I=1,N)
WRITE(3,7)
```

CALCUL DU VOLUME AJOUTE

```
VF=0.
DO 50 I=1,N
VF=VF+(2.*PI*DS*B(I)*R(I)*Z(I))
50 CONTINUE
VA=VF-VR
CA=VA/VR
WRITE(3,8)VR,VF,VA,CA
RETURN
END
```


TRAVAIL DES FORCES DYNAMIQUES



Considérons le fluide contenu dans le volume Ω limité par la surface S du corps en mouvement et par une surface Σ entourant le corps. La variation de l'énergie cinétique du fluide contenu dans Ω est égale au travail de toutes les forces extérieures ; celles-ci comprennent : la force exercée par le corps sur le fluide, la force de pesanteur, et les forces de liaisons à travers la surface. D'où :

$$d E_c = \vec{F} \cdot \vec{V}_0 dt + \iiint_{\Omega} \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} (-\rho g z) dt d\tau \\ - \iint_{\Sigma} p \vec{n} \cdot \vec{V} dt d\tau$$

Soit, d'après la formule d'OSTROGRADSKY et compte tenu de $\text{div } \vec{V} = 0$:

$$d E_c = dt \left\{ \vec{F} \cdot \vec{V}_0 + \iint_S \rho g z (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \right. \\ \left. - \iint_{\Sigma} \rho g z (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\Sigma + \iint_{\Sigma} \left(\rho \frac{V^2}{2} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g z \right) \vec{V}_0 \cdot \vec{n} d\Sigma \right\}$$

Comme $\vec{V} \cdot \vec{n} \Big|_S = \vec{V}_O \cdot \vec{n}$

$$d E_c = dt \left\{ \vec{f} \cdot \vec{V}_O + \vec{V}_O \iint_S \rho g z \vec{n} dS \right. \\ \left. + \rho \iint_{\Sigma} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma \right\}$$

Dans la première intégrale du second membre on reconnaît la poussée d'Archimède $\vec{F}_s$; dans la deuxième intégrale, l'intégrand $(\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t}) \vec{V} \cdot \vec{n}$ tend vers zéro comme $\frac{1}{(OM_\Sigma)^5}$ lorsque la surface Σ s'éloigne indéfiniment.

Il reste donc :

$$d E_c = dt (\vec{f} - \vec{F}_s) \cdot \vec{V}_O$$

L'action du fluide sur le corps, $\vec{f}^* = -\vec{f}$, est donc telle que :

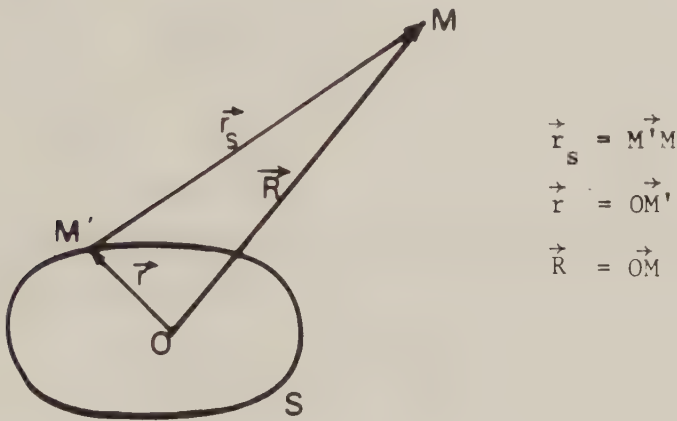
$$d E_c = - dt (\vec{f}^* - \vec{F}_s) \cdot \vec{V}_O$$

d'où finalement l'expression donnant la force dynamique $\vec{F}^* = \vec{f}^* - \vec{F}_s$ que le fluide exerce sur le corps :

$$d E_c = - \vec{F}^* \cdot \vec{V}_O dt$$

CALCUL DU DOUBLET EQUIVALENT

Soit $\sigma(M')$ la densité superficielle de sources cinématiquement équivalentes au corps en mouvement. Soit O un point situé à distance finie de la surface du corps.



$$\vec{r}_s = \vec{M'M}$$

$$\vec{r} = \vec{OM'}$$

$$\vec{R} = \vec{OM}$$

On a : $\vec{r}_s = \vec{R} - \vec{r}$

$$r_s^2 = R^2 - 2 \vec{R} \cdot \vec{r} + r^2 = R^2 \left(1 - \frac{2 \vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$\frac{1}{r_s} = \frac{1}{R} \left[1 + \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right]$$

Le potentiel au point M a pour expression :

$$\begin{aligned} \phi &= - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\sigma}{r_s} dS \\ &= - \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma \left[1 + \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right] dS \end{aligned}$$

Le corps étant supposé indéformable, on a :

$$\iint_S \sigma dS = 0$$

et par suite :

$$\phi = - \frac{\vec{R}}{4 \pi R^3} \cdot \iint \vec{r} \sigma \, dS + O\left(\frac{1}{R^3}\right)$$

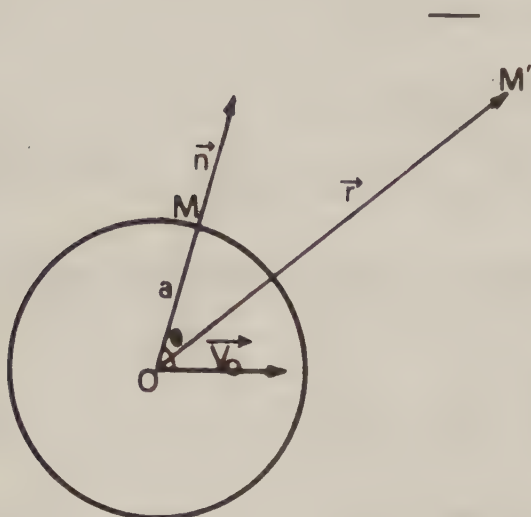
Lorsque le point M s'éloigne indéfiniment du corps, on a :

$$\phi \rightarrow - \frac{1}{4 \pi} \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{R}}{R^3}$$

d'où l'expression du doublet équivaut à l'infini du corps :

$$\vec{\mu} = \iint_S \vec{r} \sigma \, dS$$

DENSITE SUPERFICIELLE DE SINGULARITES CINEMATIQUEMENT EQUIVALENTES
A UNE SPHERE EN MOUVEMENT DE TRANSLATION



Considérons une sphère de rayon a qui effectue un mouvement de translation quelconque dans un fluide illimité.

L'étude analytique de ce problème montre que le potentiel de l'écoulement relatif du fluide est :

$$\phi = - \vec{V}_0 \cdot \vec{r} \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

$$\phi = - V_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

Les formules de GREEN permettent d'établir (voir ch.6) que l'on peut représenter l'écoulement autour d'une surface (S) fermée et indéformable par une distribution de doublets normaux, dont la densité est égale à la valeur prise sur la surface (S) par le potentiel de l'écoulement relatif. Pour la sphère, on a donc :

$$\mu = - \frac{3}{2} \vec{V}_0 \cdot \vec{r}$$

En un point M situé à l'extérieur du corps, le potentiel induit a pour expression :

$$\begin{aligned} \phi_M &= - \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \vec{n}_M \cdot \text{grad}_M \left(\frac{1}{|\vec{MM}'|} \right) dS \\ &= \frac{3}{8\pi} \iint_S (\vec{V}_0 \cdot \vec{r}) \text{grad}_M \left(\frac{1}{|\vec{MM}'|} \right) \vec{n}_M \cdot dS \end{aligned}$$

Soit :

$$\phi_M = \frac{3}{8\pi} \iiint_{\tau_0} \operatorname{div}_{M'} \left[(\vec{V}_0 \cdot \vec{r}) \operatorname{grad}_{M'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) \right] d\tau$$

τ_0 étant le domaine intérieur à la sphère.

Comme $\vec{V}_0$ ne dépend pas des variables $x' y' z'$, on a :

$$\phi = \frac{3}{8\pi} \iiint_{\tau_0} \vec{r} \cdot \vec{V}_0 \Delta \frac{1}{|MM'|} d\tau + \iiint_{\tau_0} \vec{V}_0 \cdot \operatorname{grad}_{M'} \frac{1}{|MM'|} d\tau$$

Le point M étant à l'extérieur du domaine d'intégration, la première intégrale est nulle. Il reste alors :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{3}{8\pi} \vec{V}_0 \cdot \iiint_{\tau_0} \operatorname{grad}_{M'} \frac{1}{|MM'|} d\tau \\ &= \frac{3}{8\pi} \iint_S (\vec{V}_0 \cdot \vec{n}) \frac{1}{|MM'|} dS \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression du potentiel induit par une répartition superficielle de sources d'intensité :

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{3}{2} V_0 \cdot \frac{r}{r} \\ \sigma &= -\frac{3}{2} V_0 \cos \theta \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

Hydrodynamique

- R. BRARD Cours d'hydrodynamique avancée
- P. GUEVEL Introduction à l'hydrodynamique
- J.L. HESS and
A.M.O. SMITH Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary
three-dimensional bodies.
(Douglas Aircraft Co.)
- LANDAU et
LIFSCHITZ Cours de physique théorique, ch.24
Oscillation d'un corps dans un fluide visqueux.
- L. LANDWEBER Potential flow about bodies of revolution and symetric
two-dimensional forms.
(IOWA institute of hydraulic research)
- LEBRETON Quelques aspects sur les problèmes d'interaction entre
les écoulements et les structures.
(EDF bulletin de la direction des études et des recherches)
- H. LIPPMANN Abschätzung des Widerstandes von Profilen in schleichender,
ebener, inkompressibler Strömung. (Ingenieur-Archiv)
- W. KAY MEYERHOFF Added masses of thin rectangular plates calculated from
potential theorie.
(Journal of ship research june 1970)
- L.M. MILNE-THOMSON Theoretical hydrodynamics
- SCHLICHTING Boundary-layer theorie
- E. STELSON,
J.M. ASCE,
T. MAVIS Virtual mass and acceleration in fluids.
(American society of civil engineers)
- TRINH QUANG MINH Ecoulement autour des corps de révolution en translation
uniforme suivant leur axe dans un fluide illimité, parfait
et incompressible.
(Thèse de Maitrise ès Sciences présentée à l'Université
de Sherbrooke)
- J.G. WAUGH and
A.T. ELLIS Fluid-free-surface proximity effect on a sphere vertically
accelerated from rest.
(Journal of hydronautics october 1969).

Fonctions elliptiques

A. VUEZ Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Nantes
pour obtenir le grade de Docteur-Ingénieur.

G.W. and R.M. SPENCELEY Smithsonian elliptic functions tables
(Washington 1947)

BATEMAN Higher transcendal functions
(California Institute of Technologie)

